ノート：ゲージ対称性と群論

Masamichi Zaizen
(Dated: April 24, 2025)

I. お気持ち

標準模型におけるゲージ理論に関する議論にしばしば群論が出てくるので、その辺について個人的な理解を諸々まとめておく。

II. 電磁場とゲージ

ゲージの概念は Maxwell 方程式に対して導入されていたもので、次の変換

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x) \tag{1}$$

の元で、電磁場 $F_{\mu\nu}$ が不変であるというものだった。実際にこれを見てみると、

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu & (2)\\ &= \partial_\mu A_\nu + \partial_\mu\partial_\nu\Lambda - (\partial_\nu A_\mu + \partial_\nu\partial_\mu\Lambda) & (3)\\ &= F_{\mu\nu} & (4)\end{aligned}$$

として、確かに変換に対して不変であることがわかる。変換パラメータである Λ が、その地点 (時空座標) に依存するもの $\Lambda(x)$ のことを局所変換 (local transformation) あるいはゲージ変換 (gauge transformation) と呼ぶ。座標に依存しない global な変換である大域変換とは別物なので注意。

一方で、このゲージ場 A_μ の性質を掴むために、電磁場 $F_{\mu\nu}$ についてもう少し詳しく見てみる。真空中において、この電磁場は波動方程式

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right) F_{\mu\nu} = \partial_\alpha\partial^\alpha F_{\mu\nu} = 0 \tag{5}$$

を満たす。これより電磁場は電磁波のことであることがわかっていたわけだが、これをエネルギー運動量空間 $\propto \exp[-\mathrm{i}p^\alpha x_\alpha]$ へと展開してやると、

$$p^\alpha p_\alpha \tilde{F}_{\mu\nu} = (E^2 - ||\boldsymbol{p}||^2)\tilde{F}_{\mu\nu} = 0 \tag{6}$$

と書き下せる。これより電磁場のエネルギーは $E^2 = ||\boldsymbol{p}||^2$ を満たし、質量が 0 のときの相対論的エネルギー $E^2 = ||\boldsymbol{p}||^2 + (mc^2)^2$ に相当することがわかる。結果的に、この波動方程式は電磁場あるいは光子は質量を持っていないことを教えている。この事実がゲージ場である光子が質量を持たないことを示していることに繋がる。

光子の質量について議論するために、Lorenz ゲージを利用したゲージ固定を考える。つまり、

$$\partial_\alpha A^\alpha = 0 \tag{7}$$

を課すということである。任意のベクトル場 A^α を考えたとき、必ずしもこの関係式が成立するとは限らないが、式 (1) のゲージ変換を利用してゲージ場を動かしてやればこのゲージ固定が可能になる。具体的には、ゲージパラメータ Λ として

$$\partial_\alpha\partial^\alpha\Lambda(x) = \Box\Lambda(x) = 0 \tag{8}$$

を満たすようなものを選んでこればよい。このゲージ固定の元での真空中の Maxwell 方程式は、

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu\left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right) = \partial_\mu\partial^\mu A^\nu = 0 \tag{9}$$

と書き直される。この関係式は、Klein-Gordon 方程式

$$\left(\partial_\alpha\partial^\alpha + m^2\right) A^\mu = 0 \tag{10}$$

を満たすゲージ場 A^μ が質量を持たないことを教えてくれる。

実際、Klein-Gordon 方程式に対してゲージ変換を使ってやると、

$$\left(\partial_\alpha\partial^\alpha + m^2\right) A'^\mu = \left(\partial_\alpha\partial^\alpha + m^2\right) A^\mu + \left(\partial_\alpha\partial^\alpha + m^2\right) \partial^\nu \Lambda = 0 \tag{11}$$

が得られる。Lorenz ゲージの元では $\partial_\alpha\partial^\alpha\Lambda = 0$ であるので、ゲージ不変であるためには

$$m^2 \partial^\nu \Lambda(x) = 0 \tag{12}$$

である必要がある。このとき、$\partial^\nu\Lambda(x) = 0$ はゲージ変換として trivial なものであるため、$m = 0$ がゲージ不変性から要請されることがわかる。つまり、ゲージ不変性はゲージ場が質量を持つことを禁止しているのである。これを破るためには、W ボソンのように自発的に対称性が破られなければならないこととなる。

III. ゲージ対称性と共変微分: $U(1)$

次に、電磁場中の荷電粒子に対する Dirac 方程式のゲージ対称性について見てみる。電磁場 A^μ 中の電荷 q の Dirac 方程式は

$$\left[\mathrm{i}\gamma^\mu \big(\partial_\mu + \mathrm{i}qA_\mu(x)\big) - m\right]\psi(x) = 0 \tag{13}$$

で与えられる。ここで電磁場に対するゲージ変換

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\Lambda(x) \tag{14}$$

と、波動関数に対するゲージ変換

$$\psi(x) \to \psi'(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\Lambda(x)}\psi(x) \tag{15}$$

を考えてみる。このとき Dirac 方程式の微分項の変換に注目してやると

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu\psi'(x) &= \mathrm{i}\gamma^\mu\left[\partial_\mu\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\Lambda(x)}\psi(x)\right] && (16)\\ &= \mathrm{i}\gamma^\mu\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\Lambda(x)}\partial_\mu - \mathrm{i}q\big(\partial_\mu\Lambda(x)\big)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\Lambda(x)}\right]\psi(x) && (17)\\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\Lambda(x)}\,\mathrm{i}\gamma^\mu\Big[\partial_\mu - \mathrm{i}q\big(\partial_\mu\Lambda(x)\big)\Big]\psi(x) && (18) \end{aligned}$$

と書き換えられる。続いて電磁場に注目すると

$$\mathrm{i}\gamma^\mu\cdot\mathrm{i}qA'_\mu(x)\psi'(x) = \mathrm{i}\gamma^\mu\left[\mathrm{i}qA_\mu(x) + \mathrm{i}q\big(\partial_\mu\Lambda(x)\big)\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\Lambda(x)}\psi(x) \tag{19}$$

と変換される。結果として、互いの余分な項である $\mathrm{i}q\big(\partial_\mu\Lambda(x)\big)$ がキャンセルして確かに電磁場と波動関数のゲージ変換に対して不変性が回復していることがわかる。この "打ち消し合い" を理解するために、「共変微分」という概念を導入する。この "共変" とは、波動関数と同じゲージ変換に従うような微分をという意味である。具体的には、

$$D_\mu\psi(x) \to D'_\mu\psi'(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\Lambda(x)}D_\mu\psi(x) \tag{20}$$

という変換則を満たすということである。この共変微分を用いたとき、Dirac 方程式は

$$\left(\mathrm{i}\gamma^\mu D_\mu - m\right)\psi(x) = 0 \tag{21}$$

と簡単に書き下せ、ゲージ不変になっていることがわかる。逆に言えばこの共変微分は、式 (15) の波動関数のゲージ変換に対して自由な (場のない) Dirac 方程式を不変に保つためのものであり、このとき共変微分を

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + \mathrm{i}qA_\mu(x) \tag{22}$$

および

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\Lambda(x) \tag{23}$$

として定義した場合に、このゲージ不変性が満たされることとなる。このように偏微分を共変微分にただ置き換えるだけでゲージ場 (相互作用) が自然に導入される。この置き換えだけで出現する波動関数 (物質場) とゲージ場との結合のことを、最小結合 (minimal coupling) と呼ぶ。実際に電磁場中の Dirac 方程式は、波動関数に対する U(1) 対称性を課すゲージ変換による最小結合から与えられることになる。

IV. 群論と不変性: $SU(N)$

QED に対しては、この最小結合を通してゲージ不変な物理を得ることができたが、同様に異なる位相変換群を考えることによって別のゲージ理論を組み立てることができる。実際、量子力学における状態 (波動関数) は Hilbert 空間内で定義されるベクトルとして与えられ、ここでいう対称性を与える位相変換もこの Hilbert 空間におけるユニタリ変換でなければならない。全単射かつ等長写像であるユニタリ演算子によってヒルベルト空間における状態はそのノルム、すなわち確率を保存したまま別の状態へと変換される。従ってこの変換群はいま考えている次元のヒルベルト空間に対して対称性を与えることとなる。特に SU(2) や SU(3) といったリー群を考えることで、弱い相互作用や強い相互作用を理解することができる。そのために先ほどまでの QED における U(1) 変換群を、より一般的な非可換群あるいは Non-abelian group へと拡張する。

A. ユニタリ群

N 次ユニタリ群とは、$N \times N$ の複素正方行列全体からなる群 $M_N(\mathbb{C})$ に対して

$$G_{U(N)} = \left\{ U \in M_N(\mathbb{C}) \,\middle|\, U^\dagger U = UU^\dagger = I_N \right\} \tag{24}$$

として表される集合のことである。これが群をなすことは簡単に示すことができて、集合 $\{U\}$ に対して積が定義されているときにその集合 G が積について閉じていること、そして結合則・単位元および逆元が存在することを示ればよい。結合則および単位元と逆元の存在はユニタリ性から明らか。積の演算に対する閉性については、G の元 U_1 と U_2 に対して U_1U_2 もこのユニタリ行列であることを見ればよくて、

$$U_1U_2(U_1U_2)^\dagger = U_1U_2U_2^\dagger U_1^\dagger = U_1 I_N U_1^\dagger = I_N \tag{25}$$

として確かに閉じていることがわかる。一方で、このユニタリ行列の行列式を見てみると、

$$\det(UU^\dagger) = \det(U)\det(U^\dagger) = \det(U)\det(U^t)^* = |\det(U)|^2 = 1 \tag{26}$$

となるため、$|\det(U)| = 1$ あるいは実数 θ を用いて $\det(U) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ となることがわかる。従って、行列式が 1 である条件をもつ部分群である特殊ユニタリ群 $SU(N)$ に対して、この行列式の位相をずらす項を加えることでユニタリ群 $U(N)$ へと戻すことができる。すなわち、$SU(N)$ に対して適当な $U(1)$ の元で積を取ることで一般のユニタリ群を与えることができる。

一般に、任意の $N \times N$ のユニタリ行列 U は、$N \times N$ のエルミート行列 t を用いて

$$U = \exp[-\mathrm{i}\alpha_a t_a] \tag{27}$$

として表現することができ、a についての和は N^2 個の要素 (基底) となるエルミート行列に対して取る。ここで重要な点が、t_0 は単位行列に対応し、他全てのエルミート行列と交換する。このとき explicit に a の和について表示すると、

$$U = \exp\left[-\mathrm{i} \sum_{a=0}^{N^2-1} \alpha_a t_a \right] \tag{28}$$

$$= \exp\left[-\mathrm{i}\alpha_0 t_0\right] \cdot \exp\left[-\mathrm{i} \sum_{a=1}^{N^2-1} \alpha_a t_a \right] \tag{29}$$

$$= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_0} \cdot \exp\left[-\mathrm{i} \sum_{a=1}^{N^2-1} \alpha_a t_a \right] \tag{30}$$

と書き表すことができ、単位行列を除いた後ろの $N^2 - 1$ 個のエルミート行列からなる項が特殊ユニタリ群 $SU(N)$ をなすことがわかる。このエルミート行列 t_a を生成子 (generator) と呼び、$N^2 - 1$ 個の生成子をもつ。この変換群がリー群である。正確な表現をすると、群構造と多様体構造の両方を持ち (あるいは多様体が群構造を持つ場合と言った方が良いか)、群の演算から定まる写像が C^∞ 級になるものをリー群と呼ぶ。

B. リー群

リー群を理解するために、上記の議論で出てきたエルミート行列 t_a に注目する。群 $SU(N)$ に含まれる元の行列式が１であったことを踏まえると、このエルミート行列のトレースが０になることがわかる。すなわち

$$\det(U) = \det\Big[\exp(-\mathrm{i}\alpha_a t_a)\Big] = \exp\Big[-\mathrm{i}\alpha_a \mathrm{Tr}(t_a)\Big] = 1 \tag{31}$$

となるということである。この行列式とトレースの関係式は行列指数関数のもつ性質から明らかなものであるが、その証明は Appendix A に残しておく。この結果より、このエルミート行列 t_a に対する条件が

$$\alpha_a \mathrm{Tr}(t_a) = 0 \tag{32}$$

として与えられる。任意のユニタリ行列を表すための条件としては、このエルミート行列 t_a がトレースレスであることが必要になる。いま、このトレースレスかつエルミートである行列 X の集合を考えてみる：

$$\mathfrak{g}_{\mathfrak{su}(N)} = \Big\{X \in M_N(\mathbb{C}) \,|\, X^\dagger = X, \mathrm{Tr}(X) = 0\Big\}. \tag{33}$$

このとき $G_{SU(N)}$ の任意の元 $U \in G_{SU(N)}$ は、$\mathfrak{g}_{\mathfrak{su}(N)}$ の元 $X \in \mathfrak{g}_{\mathfrak{su}(N)}$ を用いて $U = \exp(\mathrm{i}X)$ として与えられる。このようなリー群 $G_{SU(N)}$ に対して $\mathfrak{g}_{\mathfrak{su}(N)}$ をリー環あるいはリー代数と呼ぶ。なぜこの集合が群ではなく環の構造を持つかは、乗法に対して逆元を持たずに交換子を介して閉じていることに起因している。つまり $\mathfrak{g}_{\mathfrak{su}(N)}$ の任意の元である X_1, X_2 に対して、その交換子もまた $\mathfrak{g}_{\mathfrak{su}(N)}$ の元となっている：

$$\mathrm{i}[X_1, X_2] \in \mathfrak{g}_{\mathfrak{su}(N)}. \tag{34}$$

この交換子がトレースレスかつエルミートであるこのとの証明は簡単で、

$$(X_1X_2)^\dagger = X_2^\dagger X_1^\dagger = X_2X_1 \tag{35}$$

であることより

$$(\mathrm{i}[X_1, X_2])^\dagger = -\mathrm{i}(X_2X_1 - X_1X_2) = \mathrm{i}[X_1, X_2] \tag{36}$$

としてエルミート性が得られる。またトレースレスについても、トレースの循環性 $\mathrm{Tr}(X_1X_2) = \mathrm{Tr}(X_2X_1)$ よりすぐにわかる。この交換関係については先ほど見た生成子に注目することで更にその構造を理解できる。$\mathfrak{g}_{\mathfrak{su}(N)}$ の任意の元は

$$X = \sum_{a=1}^{N^2-1} \alpha_a t_a \tag{37}$$

として生成子 t_a を基底とした選んであげた形で展開することができた。交換子もまた $\mathfrak{g}_{\mathfrak{su}(N)}$ の元であるのでこれもまた同様に展開することが可能なはずである。そこで任意の元として基底を選んでもよくて、そのとき交換子を

$$[t_a, t_b] = \mathrm{i}\sum_{c=1}^{N^2-1} f_{abc} t_c = \mathrm{i} f_{abc} t^c \tag{38}$$

として係数 f_{abc} を用いて展開することができる（以後は縮約記法を用いてることにする）。この係数を構造定数と呼び、これによってリー代数が特徴づけられる。交換子の反対称性より明らかに

$$f_{bac} = -f_{abc} \tag{39}$$

である。次に添字 c に対する対称性について見ていくが、ここで生成子の性質を

$$\mathrm{Tr}(t_a t_b) = \delta_{ab} \tag{40}$$

として直交性をもつような基底行列として生成子を選んでやることが可能である。これを踏まえて改めて交換子との積のトレースを見ると、

$$\mathrm{Tr}(t_c[t_a, t_b]) = \mathrm{Tr}(t_c\, \mathrm{i} f_{abd} t^d) = \mathrm{i} f_{abd} \mathrm{Tr}(t_c t^d) = \mathrm{i} f_{abd} \delta_c^d = \mathrm{i} f_{abc} \tag{41}$$

であることと、

$$\mathrm{Tr}(t_c[t_a, t_b]) = \mathrm{Tr}(t_c t_a t_b - t_c t_b t_a) = \mathrm{Tr}([t_c, t_a] t_b) = \mathrm{i} f_{cab} = -\mathrm{i} f_{acb} \tag{42}$$

であることより後ろ二つの添字についても反対称であることがわかる。結局この構造定数は3つの添字それぞれについて完全反対称性をもつこととなる。

　最後に、この構造定数がリー代数だけでなく、リー群の構造をも決めていることを確認する。いまは乗法について閉じていたことから群構造を見ていた。その事実から、

$$\exp\left[-\mathrm{i}\alpha_1^a t_a\right] \cdot \exp\left[-\mathrm{i}\alpha_2^b t_b\right] = \exp\left[-\mathrm{i}\alpha_3^c t_c\right] \tag{43}$$

として基底行列 t_a を用いて表されるはずである。この係数 α_3 が関数 $\alpha_3(\alpha_1, \alpha_2)$ として群の構造を決めているはずである。これを理解するためには、Baker-Campbell-Hausdorff (BCH) 公式を見ればよい。スカラー量 x, y に対して我々はその指数関数に対して通常、$\exp[x] \cdot \exp[y] = \exp[x + y]$ として書き下せることを知っている。しかしこれはこの数 x, y 同士が可換であるから成立する性質であり、演算子のような非可換なものの場合には成り立たない。これを表したものが BCH 公式 [1]

$$\exp[A] \cdot \exp[B] = \exp\left[A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{12}[A, [A, B]] + \frac{1}{12}[B, [B, A]] + \dots\right] \tag{44}$$

である。この証明は Appendix B に残す。この公式を元に具体的に係数の関数 $\alpha_c(\alpha_a, \alpha_b)$ を頑張って書き下してやる。

$$\begin{aligned}
-\mathrm{i}\alpha_3^c t_c &= -\mathrm{i}\alpha_1^a t_a - \mathrm{i}\alpha_2^b t_b + \frac{1}{2}[-\mathrm{i}\alpha_1^a t_a, -\mathrm{i}\alpha_2^b t_b] + \frac{1}{12}[-\mathrm{i}\alpha_1^a t_a + \mathrm{i}\alpha_2^b t_b, [-\mathrm{i}\alpha_1^a t_a, -\mathrm{i}\alpha_2^b t_b]] && (45) \\
&= -\mathrm{i}(\alpha_1^c + \alpha_2^c) t_c - \frac{1}{2}\alpha_1^a \alpha_2^b [t_a, t_b] + \frac{\mathrm{i}}{12}[(\alpha_1^e - \alpha_2^e) t_e, \alpha_1^a \alpha_2^b [t_a, t_b]] && (46) \\
&= -\mathrm{i}(\alpha_1^c + \alpha_2^c) t_c - \frac{\mathrm{i}}{2}\alpha_1^a \alpha_2^b f_{abc} t^c + \frac{\mathrm{i}}{12}(\alpha_1^e - \alpha_2^e)\alpha_1^a \alpha_2^b [t_e, \mathrm{i} f_{abd} t^d] && (47) \\
&= -\mathrm{i}(\alpha_1^c + \alpha_2^c) t_c - \frac{\mathrm{i}}{2}\alpha_1^a \alpha_2^b f_{abc} t^c - \frac{\mathrm{i}}{12}(\alpha_1^e - \alpha_2^e)\alpha_1^a \alpha_2^b f_{abd} f_{edc} t^c && (48)
\end{aligned}$$

長々と書いたが結論としては

$$\alpha_3^c(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1^c + \alpha_2^c + \frac{1}{2} f_{abc}\alpha_1^a \alpha_2^b + \frac{1}{12} f_{abd} f_{edc}(\alpha_1^a \alpha_1^e \alpha_2^b - \alpha_1^a \alpha_2^b \alpha_2^e) + \dots \tag{49}$$

として、引数を除いて構造定数 f_{abc} のみしか登場しないことがわかる。したがって、この構造定数 f_{abc} が名前通りに群の構造までも決定づけるものとなっていることがわかる。

　最後に、リー群が多様体であることを軽く実感する。リー群

$$G = \left\{ \exp\left[\mathrm{i}\alpha^a X_a\right] \right\} \tag{50}$$

に対して、その単位元を通る曲線

$$g(t) \equiv \exp\left[\mathrm{i}t\alpha^a X_a\right] \tag{51}$$

を考えてやる。このとき、その単位元における接ベクトルは

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g(t)\right|_{t=0} = \mathrm{i}\alpha^a X_a g(0) \tag{52}$$

と与えられる。この表式から、リー代数の基底 X_a が接ベクトルのなす接空間における基底になっていることがわかる。多様体においては、接ベクトルの基底は $\partial/\partial x_a$ であったことから、それがリー代数の基底 X_a に置き換わったものとして考えられる。いまここで多様体上の局所座標系 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ における2つの接ベクトル

$$A = \xi^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad B = \eta^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{53}$$

[1] $SU(N)$ だとかは関係なく一般に成立するものであることに注意。

に対する交換関係をとってやると、

$$[A,B] = \left[\xi^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \eta^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right] \tag{54}$$

$$= \left[\xi^\mu \frac{\partial \eta^\nu}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu} + \xi^\mu \eta^\nu \frac{\partial^2}{\partial x^\mu x^\nu}\right] - \left[\eta^\nu \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \eta^\nu \xi^\mu \frac{\partial^2}{\partial x^\nu x^\mu}\right] \tag{55}$$

$$= \left[\xi^\mu \frac{\partial \eta^\nu}{\partial x^\mu} - \eta^\mu \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\mu}\right]\frac{\partial}{\partial x^\nu} \tag{56}$$

として確かに交換子も接ベクトルになっている。このようにリー代数がリー群の接空間の構造を多様体を介して与えていることがわかる。

C. 表現

ここまでの説明においては具体的な行列を与えてはこなかったものの、行列の集合としてリー群やリー代数を定義して議論を進めていた。しかし群や環の定義自体としては積に対する定義を与えてさえいれば問題なかったはずである。このように具体的にベクトル空間上で与えられる行列として認識するための、群 G から一般線形変換群 $GL(n,\mathbb{C})$ への準同型写像のことを「表現」と呼ぶ。つまり、群 G の任意の元 g に対して $n\times n$ の正則行列 $\rho(g)$ が存在し、群 G と同じ積のルール・構造を保存した行列の集合 $\{\rho(g)\}$ のことを群 G の表現

$$\rho : G \to GL(V) \tag{57}$$

と呼ぶ、というものである。このように表現を定義しておくと、群をヒルベルト空間上の線形変換として具体化することが可能となる。重要なのは、Dirac 場をなすフェルミオンなどの粒子はヒルベルト空間上のベクトルとして表される。つまりフェルミオン場は群 $SU(N)$ の基本表現である一般線形変換が作用するヒルベルト空間の元であり、ゲージ変換はこの空間における線形変換として与えられるということである。たとえば、$SU(3)$ ゲージ理論におけるクォークは

$$\psi = \begin{pmatrix}\psi_r\\ \psi_g\\ \psi_b\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \tag{58}$$

として与えられ、$SU(3)$ の基本表現のもとで

$$\psi : \psi'(x) = U(x)\psi(x) \tag{59}$$

として変換される。

またこの表現という考え方はリー代数のような特殊な積の交換関係をもつ場合においても重要な意味をもつ。リー代数の基底 X_i に対する表現が存在し、その交換則は

$$[\rho(X_k), \rho(X_l)] = \mathrm{i} f_{klm}\rho(X^m) \tag{60}$$

として構造定数を用いて生成子と同様の表式で与えることができる [2]。このようなリー代数の基底、あるいは生成子に対する表現行列は

$$\{\rho(X_a)\}_{bc} = -\mathrm{i} f_{abc} \tag{61}$$

として構造定数 f_{abc} を用いて与えることで、リー代数の表現を得ることができる。これは行列 $t_a = \rho(X_a)$ の (bc) 成分が構造定数 f_{abc} を用いて表されるということである。こうしたリー代数への表現は特にリー代数の「随伴表現」(adjoint representation) と呼ばれ、

$$\mathrm{ad}(X_a) := \rho(X_a) \tag{62}$$

と表記される。この随伴表現がうまくいくことは、リー代数におけるヤコビの恒等式を用いて交換関係が成り立つことから理解できる。リー代数の任意の元 A, B, C に対して満たされる関係式

$$[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] = 0 \tag{63}$$

---

[2] この表現は一意に決まるものではない。生成子 $\{X_i\}_{i=1}^{n^2-1}$ の線形結合をとることで新たな基底 $\{X_i'\}_{i=1}^{n^2-1}$ をつくることが可能であり、そのときこの 2 つの集合は異なる表現をなしている。

のことをヤコビの恒等式と呼ぶ。この恒等式をリー代数の基底に対して代入することで

$$f_{abm}f_{cmn}+f_{bcm}f_{amn}+f_{cam}f_{bmn}=0 \tag{64}$$

として構造定数に対する関係式が得られる。これを先ほどの随伴表現の行列表式で置き換えてやる。すなわち

$$\mathrm{i}\{\mathrm{ad}(X_a)\}_{bm}\cdot\mathrm{i}\{\mathrm{ad}(X_c)\}_{mn}-\mathrm{i}\{\mathrm{ad}(X_c)\}_{bm}\cdot\mathrm{i}\{\mathrm{ad}(X_a)\}_{mn}+f_{acm}f_{mbn}=0 \tag{65}$$

と表される。ここで構造定数の反対称性 $f_{abc}=-f_{bac}$ を利用している。これより

$$[\mathrm{ad}(X_a),\mathrm{ad}(X_c)]_{bn}=\mathrm{i}f_{acm}\{\mathrm{ad}(X_m)\}_{bn} \tag{66}$$

あるいは

$$[\mathrm{ad}(X_a),\mathrm{ad}(X_c)]=\mathrm{i}f_{acm}\,\mathrm{ad}(X_m) \tag{67}$$

として確かに随伴表現がリー代数の基底の交換関係と等しいことがわかる。このような随伴表現の次元は n^2-1 である。たとえば $SU(3)$ の場合には８次元表現（８重項表現, octat）であり、3×3 のエルミート行列８個に対応する。

V. NON-ABELIAN GAUGE THEORY

最後に前章でまとめたリー群のもとで非可換ゲージ理論を構築する。ここでやるべきことは $U(1)$ のときと殆ど同じで、最小結合に基づいてゲージを導入すればいい。ただここで気をつけるべきことは、$U(1)$ のときとは異なり導入するゲージ場が非可換になっているという点である。すなわち、N 成分の Dirac 方程式を

$$(\mathrm{i}\gamma^\mu D_\mu-m)\psi=0, \tag{68}$$

where

$$D_\mu=\partial_\mu+\mathrm{i}gA_\mu \tag{69}$$

としてゲージ場 A_μ を次の $SU(N)$ のもとで不変であるように導入する：

$$U(x)=\exp[-\mathrm{i}g\Lambda(x)],\;\;\Lambda(x)=\alpha^a(x)X_a\;\;U\in G_{SU(N)} \tag{70}$$

ここで X_a はリー代数の基底行列であり、$U(1)$ の電磁場とは異なり非可換なものである。この $SU(N)$ ゲージ変換に対して

$$D_\mu\psi(x)\to D'_\mu\psi'(x)=U(x)D_\mu\psi(x) \tag{71}$$

となるようなゲージ場を入れることを要請する。そのとき

$$D'_\mu\psi'(x)=\left[\partial_\mu+\mathrm{i}gA'_\mu(x)\right]U(x)\psi(x) \tag{72}$$

$$=U(x)\left[\partial_\mu+U^\dagger(x)\partial_\mu U(x)+\mathrm{i}gU^\dagger(x)A'_\mu(x)U(x)\right]\psi(x) \tag{73}$$

$$\equiv U(x)\left[\partial_\mu+\mathrm{i}gA_\mu(x)\right]\psi(x) \tag{74}$$

となる必要があるので、結果としてゲージ場に要請される変換則は

$$A_\mu(x)\to A'_\mu(x)=U(x)A_\mu(x)U^\dagger(x)+\frac{\mathrm{i}}{g}\left[\partial_\mu U(x)\right]U^\dagger(x) \tag{75}$$

となる。この右辺第２項を展開すると

$$\left[\partial_\mu U(x)\right]U^\dagger(x)=-\mathrm{i}g[\partial_\mu\Lambda(x)]U(x)U^\dagger(x) \tag{76}$$

$$=-\mathrm{i}g\partial_\mu\alpha^a(x)X_a\in\mathfrak{g}_{su(N)} \tag{77}$$

としてリー代数の元になっていることがわかる。元々この項は波動関数に対する変換の際に出てくる余分な項であり、これをうまく吸収できるようにゲージ場の変換則を与え、そして共変微分を定義していた。この吸収されるものがリー代数の元であったことを踏まえると、このゲージ場 A_μ もまたリー代数で記述できるはずだと考えられる。事実、$A_\mu\in\mathfrak{g}_{su(N)}$ に対して、$U\in G_{SU(N)}$ となる変換行列で挟んだ $U(x)A_\mu(x)U^\dagger(x)$ もまたリー代数の元となっている。すなわち Eq. (75)

全体がリー代数で閉じていることがわかる。ゲージ場 A_μ がリー代数の元であるということは、これを基底で展開することが可能で

$$A_\mu = \sum_a^{N^2-1} A_\mu^a X_a \tag{78}$$

として N^2-1 個の成分に分けることができる。このゲージ場の変換則はリー代数の随伴表現の作用と一致する。したがって、ゲージ場を行列表式するために基底のところで随伴表現を用いて

$$\{A_\mu\}_{bc} = -\mathrm{i}A_\mu^a f_{abc} \tag{79}$$

と書き表すことができる。これにより随伴表現における共変微分を定義することもできる。さて、$SU(3)$ で記述される QCD においてはこのゲージ場は 8 個の成分をもつことを意味し、これがグルーオンが 8 個あることに対応している。また $SU(2)\times U(1)$ の電弱統一理論においては $A_\mu^1, A_\mu^2, A_\mu^3, B$ の 4 つのゲージ場が導入され、このうち A_μ^1 と A_μ^2 の線形結合が $W^\pm$ ボソンを、A_μ^3 と B の線形結合が Z^0 ボソンと光子になる。

VI. ラグランジアン

最後にこの非可換ゲージ理論におけるラグランジアンについて確認する。スカラー場 ϕ やディラック場 ψ に対するラグランジアン密度はそれぞれ

$$\mathcal{L}(\phi) = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 \tag{80}$$

$$\mathcal{L}(\psi) = \bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \tag{81}$$

で与えられていた。これらに対する要請としては不変性、特にゲージ不変性が重要であった。同じ考えがゲージ場に対しても導入できるはずである。事実 Maxwell 方程式のラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{\mathrm{em}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{82}$$

として電磁場を用いて与えられていた。この電磁場自体ゲージ不変となっており、「場の強さ」として共変微分の交換関係から

$$
\begin{aligned}
[D_\mu, D_\nu]\,\psi &= [\partial_\mu + \mathrm{i}qA_\mu, \partial_\nu + \mathrm{i}qA_\nu]\,\psi & (83)\\
&= [\partial_\mu, \partial_\nu]\psi + \mathrm{i}q[A_\mu, \partial_\nu]\psi + \mathrm{i}q[\partial_\mu, A_\nu]\psi + (\mathrm{i}q)^2[A_\mu, A_\nu]\psi & (84)\\
&= \mathrm{i}q\left[A_\mu(\partial_\nu\psi) - \partial_\nu(A_\mu\psi) + \partial_\mu(A_\nu\psi) - A_\nu(\partial_\mu\psi)\right] + (\mathrm{i}q)^2[A_\mu, A_\nu]\psi & (85)\\
&= \mathrm{i}q(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\psi + (\mathrm{i}q)^2[A_\mu, A_\nu]\psi & (86)\\
&= \mathrm{i}qF_{\mu\nu}\psi & (87)
\end{aligned}
$$

として与えることもできた。ここで ψ は微分演算子の作用先を明示するために導入したものであり、また最後の行では電磁場の $U(1)$ におけるゲージ場の可換性を用いた。これは逆に言えば、$SU(N)$ などの一般の非可換ゲージ理論においてはこのゲージ場同士の交換関係が場の強さに入ってくることを意味している。要するに

$$
\begin{aligned}
F_{\mu\nu} &\equiv \frac{1}{\mathrm{i}g}[D_\mu, D_\nu] & (88)\\
&= (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + \mathrm{i}g[A_\mu, A_\nu] & (89)\\
&= (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + \mathrm{i}gA_\mu^a A_\nu^b[X_a, X_b] & (90)\\
&= (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) - gf_{abc}A_\mu^a A_\nu^b X^c & (91)
\end{aligned}
$$

と表されることとなる。この場の強さ $F_{\mu\nu}$ も当然リー代数に含まれるため、これを

$$F_{\mu\nu}^c X_c = \left[\partial_\mu A_\nu^c - \partial_\nu A_\mu^c - gf_{ab}{}^c A_\mu^a A_\nu^b\right] X_c \tag{92}$$

として書き下すこともできる。この第 3 項はゲージ場の非可換性から出てきたものであり、ゲージ場の非線形性を表している。すなわち $U(1)$ 対称性のもとで成り立っていた電磁場、つまり光子とは異なり、たとえば $SU(3)$ に基づいた QCD においてはグルーオンの自己相互作用が存在することが群論から出てくることを意味している。

このとき、ラグランジアンはテンソルではなくスカラー量なのでトレースを使って

$$\mathcal{L} \equiv -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}[F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}] \tag{93}$$

として与えられる。係数の違いはトレースの部分から来ている。これを理解するにはリー代数の基底で分解した形を使うのがわかりやすく、いま生成子について

$$\mathrm{Tr}[X^a X_b] = \frac{1}{2}\delta^a_b \tag{94}$$

とした関係式がある。これを使うと、ゲージ場のラグランジアンは

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^c_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_c \tag{95}$$

として電磁場のときと似たような形に書き換えられることがわかる。

Appendix A: 行列指数関数の行列式とトレース

対角化可能な行列 A に対して、

$$PAP^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \tag{A1}$$

と表せる正則行列 P が存在する。そのとき行列指数関数は定義より

$$P\ \exp(A)P^{-1} = P\left(\sum_k \frac{1}{k!}A^k\right)P^{-1} \tag{A2}$$

$$= P\left(\sum_k \frac{1}{k!}\mathrm{diag}(\lambda_1^k, \cdots, \lambda_n^k)\right)P^{-1} \tag{A3}$$

$$= \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\lambda_1}, \cdots, \mathrm{e}^{\lambda_n}) \tag{A4}$$

として対角化できる。行列式の性質として

$$\det(VMV^{-1}) = \det(V)\det(M)\det(V)^{-1} = \det(M) \tag{A5}$$

であるため、行列指数関数の行列式は

$$\det(\exp A) = \det\left[P(\exp A)P^{-1}\right] \tag{A6}$$

$$= \det\left[\mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\lambda_1}, \cdots, \mathrm{e}^{\lambda_n})\right] \tag{A7}$$

$$= \exp\left(\sum_k^n \lambda_k\right) \tag{A8}$$

となる。一方で、トレースの性質として中の行列の積は循環させることが可能であるため、

$$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(PAP^{-1}) = \mathrm{Tr}\big[\mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\lambda_1}, \cdots, \mathrm{e}^{\lambda_n})\big] = \sum_k^n \lambda_k \tag{A9}$$

となる。以上より、行列指数関数の行列式とトレースの間に

$$\det(\exp A) = \exp\big(\mathrm{Tr}A\big) \tag{A10}$$

という関係が成り立つことが証明された。

Appendix B: BCH 公式の証明

BCH 公式 Eq. B1 とは、非可換な演算子に対する指数関数同士の積についての関係式

$$\exp[A]\cdot\exp[B]=\exp\left[A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}[A,[A,B]]+\frac{1}{12}[B,[B,A]]+\dots\right] \tag{B1}$$

のことであった。この両辺に対数をとってやれば

$$\ln[\mathrm{e}^A\mathrm{e}^B]=C \tag{B2}$$

として簡単な書き方をすることができる。ここで実数 t に対する関数 f,g をそれぞれ以下のように定義する。

$$f(t)\equiv\ln[\mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{tB}]\equiv\ln[g(t)] \tag{B3}$$

$$g(t)\equiv\mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{tB}. \tag{B4}$$

これらを t について $t=0$ のまわりで Taylor 展開する。まず g の微分を書き出すと、

$$g'(t)|_{t=0}=\left(A\mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{tB}+\mathrm{e}^{tA}B\mathrm{e}^{tB}\right)\Big|_{t=0}=A+B \tag{B5}$$

$$g''(t)|_{t=0}=\left(A^2\mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{tB}+A\mathrm{e}^{tA}B\mathrm{e}^{tB}+A\mathrm{e}^{tA}B\mathrm{e}^{tB}+\mathrm{e}^{tA}B^2\mathrm{e}^{tB}\right)\Big|_{t=0} \tag{B6}$$

$$=A^2+2AB+B^2=(A+B)^2+[A,B] \tag{B7}$$

$$g'''(t)|_{t=0}=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3=(A+B)^3+(2A+B)[A,B]+[A,B](A+2B) \tag{B8}$$

となる [3]。これより g は

$$g(t)=g(0)+g'(0)t+\frac{1}{2}g''(0)t^2+\frac{1}{6}g'''(0)t^3+\mathcal{O}(t^4) \tag{B12}$$

$$\simeq 1+(A+B)t+\frac{1}{2}\left((A+B)^2+[A,B]\right)t^2+\frac{1}{6}\left((A+B)^3+(2A+B)[A,B]+[A,B](A+2B)\right)t^3 \tag{B13}$$

$$\equiv 1+F(t) \tag{B14}$$

と展開できる。これを用いてさらに元の関数 f を展開すればよくて、対数の Taylor 展開 $\ln(1+x)\simeq x-x^2/2+x^3/6$ から

$$f(t)=\ln[1+F(t)] \tag{B15}$$

$$\simeq F(t)-\frac{F(t)^2}{2}+\frac{F(t)^3}{3} \tag{B16}$$

と書ける。あとはこれを地道に次数ごとに書き出してあげればよい。まず t の 1 次の係数は

$$A+B \tag{B17}$$

つづいて 2 次は

$$\frac{1}{2}\left((A+B)^2+[A,B]\right)-\frac{1}{2}(A+B)^2=\frac{1}{2}[A,B] \tag{B18}$$

最後に 3 次は

$$\frac{1}{6}\left((A+B)^3+(2A+B)[A,B]+[A,B](A+2B)\right)-\frac{1}{2}(A+B)\frac{1}{2}\left((A+B)^2+[A,B]\right) \tag{B19}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\left((A+B)^2+[A,B]\right)(A+B)+\frac{1}{3}(A+B)^3 \tag{B20}$$

$$=\frac{1}{12}(A-B)[A,B]-\frac{1}{12}[A,B](A-B)=\frac{1}{12}[A-B,[A,B]] \tag{B21}$$

として得られる。いま欲しいものは $t=1$ としたときのものなので、

$$C=f(t=1)=A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}[A-B,[A,B]]+\dots \tag{B22}$$

として BCH 公式を示すことができた。

---

[3]

$$A^3+3A^2B+3AB^2+B^3=(A+B)^3+2A^2B+2AB^2-ABA-BA^2-B^2A-BAB \tag{B9}$$

$$=(A+B)^3+2A[A,B]+ABA+2[A,B]B+BAB-BA^2-B^2A \tag{B10}$$

$$=(2A+B)[A,B]+[A,B](A+2B) \tag{B11}$$