ノート：ニュートリノ振動項の導出

Masamichi Zaizen
(Dated: February 2025)

I. お気持ち

ニュートリノ振動において、しばしば物質振動や集団振動は、背景物質からの “refractive effect” によって引き起こされる現象であるものとして表現される。これは単純に、真空振動のような固有な波長を持つニュートリノが、荷電レプトンやニュートリノなどの物質の海を突き抜ける際に屈折作用を受けてその振動波長が変化ことで非自明なニュートリノ振動効果が現れるというものである。Refraction の重要な点としては、ニュートリノの反応率が $\propto G_{\mathrm{F}}^2$ に比例するのに対し、この refractive term が $\propto G_{\mathrm{F}}^1$ として coupling constant の次数に違いが出ることである。この事実は、超新星爆発や連星中性子星合体内部における weak collisions よりもずっと速いスケールでニュートリノ振動が遂行されていくことを意味している。このノートでは、改めてその依存性についてまとめることとする。

II. PERTURBATIVE EXPANSIONS

ニュートリノの quantum kinetic equation を導出するには複数の方法が提案されているが、ここでは Sigl & Raffelt (1993) を参考にしつつ、相互作用 Hamiltonian を摂動展開することでこれらの項を得ることを目指す [1]

A. Free propagation: No interactions

まずは自由に伝搬するニュートリノに注目する。その際には何も weak interaction は関係ないので、mass basis で考えて良いはずである。そのときの Dirac 方程式は

$$(\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - m_i)\psi_i = 0. \tag{1}$$

このとき下付き添え字の Latin は質量固有状態 ($i = 1, 2, 3$) を意味する。いま平面展開された Dirac 方程式の解は更に第二量子化に基づいて書き下すことが可能である。生成消滅演算子 a, b に対して

$$\hat{\psi}_i = \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\left[a_i(t,\boldsymbol{p})u_{\boldsymbol{p}}^{(i)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} + b_i^\dagger(t,\boldsymbol{p})v_{\boldsymbol{p}}^{(i)}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\right] \tag{2}$$

と表される。ここで $u_{\boldsymbol{p}}, v_{\boldsymbol{p}}$ はそれぞれニュートリノと反ニュートリノに対する Dirac spinors であり、${u_{\boldsymbol{p}}^{(i)}}^\dagger u_{\boldsymbol{p}}^{(i)} = {v_{\boldsymbol{p}}^{(i)}}^\dagger v_{\boldsymbol{p}}^{(i)} = 2E_i$ となるように規格化されている。また生成消滅演算子は以下の反交換関係を満たす:

$$\{a_i(\boldsymbol{p}),\, a_j^\dagger(\boldsymbol{p}')\} = \{b_i(\boldsymbol{p}),\, b_j^\dagger(\boldsymbol{p}')\} = \delta_{ij}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'). \tag{3}$$

さて、いま相互作用をしない自由に伝搬しているニュートリノについて考えているので、その Hamiltonian は生成消滅演算子を用いて

$$\left(\hat{H}_{\mathrm{free}}\right)_{ii} = \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3} E_i\, a_i^\dagger(\boldsymbol{p})a_i(\boldsymbol{p}) \tag{4}$$

として簡単に表すことができる。ニュートリノの質量は KATRIN 実験や宇宙論的な制限より、1 eV よりも小さいことがわかっている。従って Majorana 質量や sterile ニュートリノなどを考慮しない限りはその運動は ultra-relativistic であるものとして扱うことができる。そのときニュートリノのエネルギーは運動量 p を用いて $E_i = \sqrt{p_i^2 + m_i^2} \simeq p_i + \dfrac{m_i^2}{2p_i}$

[1] 他には例えば、quantum field theory に則って Green 関数から self-energy を導入し、Schwinger-Dyson 方程式と Dirac Green function を組み合わせることで QKE を得る手法がある (Vlasenko & Cirigliano PRD 2014) 。また、classical な Boltzmann 方程式と同様に、量子多体系のまま構築した密度行列の運動方程式に対して BBGKY hierarchy を当てて truncate させることで得る手法などもある (Volpe+ PRD 2013)。

として１次で展開できる。またこの ultra-relativistic な状態であれば、ニュートリノの質量固有状態によらず $p_i \approx p$ という近似が成り立つ。従ってこの free Hamiltonian は

$$\hat{H}_{\mathrm{free}} = \hat{H}_{\mathrm{kin}} + \hat{H}_{\mathrm{vac}} \tag{5}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3} p\, a_i^\dagger(\boldsymbol{p}) a_i(\boldsymbol{p}) + \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3} \frac{m_i^2}{2p}\, a_i^\dagger(\boldsymbol{p}) a_i(\boldsymbol{p}) \tag{6}$$

として２つの項に分けることができる。真空中でのニュートリノ振動を引き起こすのはこのうちの第２項であり、それを見るために mass basis から今度は flavor basis への変換を考える。

ニュートリノにおける kinetic な Hamiltonian と弱い相互作用による Hamiltonian は交換しないことが一般に知られており、その場合にはそれぞれの固有状態を用いて同時対角化することはできない。これらの固有状態は SO(3) の回転行列を用いて

$$a_\alpha = (U_{\mathrm{PMNS}})_{\alpha i}\, a_i = [O(\theta_{23})O(\theta_{13})O(\theta_{12})]_{\alpha i}\, a_i \tag{7}$$

$$a_\alpha^\dagger = (U_{\mathrm{PMNS}})^\dagger_{\alpha i}\, a_i^\dagger = [O(\theta_{23})O(\theta_{13})O(\theta_{12})]^\dagger_{\alpha i}\, a_i^\dagger \tag{8}$$

として関係付けられる。ここで Greek はフレーバー固有状態 $(\alpha = e, \mu, \tau)$ を意味する。これを先ほどの free Hamiltonian に適用させて、mass basis での記述から flavor basis へと変更させる。つまり

$$\hat{H}^f_{\mathrm{free}} = \hat{H}^m_{\mathrm{free}} \tag{9}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3} \left[p\, a_i^\dagger(\boldsymbol{p}) a_i(\boldsymbol{p})\right] + \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3} \left[\frac{m_i^2}{2p}\, a_i^\dagger(\boldsymbol{p}) a_i(\boldsymbol{p})\right] \tag{10}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3} \left[p\, U_{\alpha i} a_\alpha^\dagger(\boldsymbol{p}) a_\beta(\boldsymbol{p}) U^\dagger_{\beta i}\right] + \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3} \left[\frac{m_i^2}{2p}\, U_{\alpha i} a_\alpha^\dagger(\boldsymbol{p}) a_\beta(\boldsymbol{p}) U^\dagger_{\beta i}\right] \tag{11}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3} \left[p\, a_\alpha^\dagger(\boldsymbol{p}) \delta_{\alpha\beta} a_\beta(\boldsymbol{p})\right] + \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3} \left[a_\alpha^\dagger(\boldsymbol{p}) \Omega_{\alpha\beta}(p) a_\beta(\boldsymbol{p})\right], \tag{12}$$

where $\Omega_{\alpha\beta} \equiv U_{\alpha i} \dfrac{m_i^2}{2p} U^\dagger_{\beta i}$. このようにフレーバー固有状態の生成消滅演算子を使って Hamiltonian を書き直すことができる。mass basis で書き下した場合と比較してみたければ、Hamiltonian を $|\Psi\rangle$ で挟んで得られる期待値の表式を見てやれば良い。第１項はあえて書いた $\delta_{\alpha\beta}$ が対角項しか持たないことからわかるように、生成消滅演算子を通して $\langle\nu_i|\nu_i\rangle$ と $\langle\nu_\alpha|\nu_\alpha\rangle$ となるだけで違いはない。しかし第２項においては、flavor basis では $\Omega_{\alpha\beta}$ が non-zero な非対角項をもつことが明らかである。これが非自明な真空中でのニュートリノ振動を与える。

ここまではまだ第二量子化の元での議論であり、ニュートリノに対して ensemble したものを見ていない。ここでは１粒子の密度行列を

$$\left\langle a_\beta^\dagger(q) a_\alpha(p) \right\rangle = \mathrm{Tr}\left\{a_\beta^\dagger(q) a_\alpha(p) \hat{\rho}(t)\right\} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(p-q) \rho_{\alpha\beta}(t,p) \tag{13}$$

としてニュートリノの数演算子の ensemble 平均を取ったものとして定義する。これに対して von-Neumann eq. を取ってやると

$$\mathrm{i}\mathrm{d}_t \left\langle a_\beta^\dagger(q) a_\alpha(p) \right\rangle = \mathrm{Tr}\left\{a_\beta^\dagger(q) a_\alpha(p) \left[\hat{H}_{\mathrm{free}}, \hat{\rho}\right]\right\} \tag{14}$$

$$= \mathrm{Tr}\left\{a_\beta^\dagger(q) a_\alpha(p) \hat{H}_{\mathrm{free}} \hat{\rho}\right\} - \mathrm{Tr}\left\{a_\beta^\dagger(q) a_\alpha(p) \hat{\rho} \hat{H}_{\mathrm{free}}\right\} \tag{15}$$

$$= \mathrm{Tr}\left\{a_\beta^\dagger(q) a_\alpha(p) \hat{H}_{\mathrm{free}} \hat{\rho}\right\} - \mathrm{Tr}\left\{\hat{H}_{\mathrm{free}} a_\beta^\dagger(q) a_\alpha(p) \hat{\rho}\right\} \qquad (\because \text{trace circulation}) \tag{16}$$

$$= \mathrm{Tr}\left\{\left[a_\beta^\dagger(q) a_\alpha(p), \hat{H}_{\mathrm{free}}\right] \hat{\rho}\right\} \tag{17}$$

$$= \left\langle \left[a_\beta^\dagger(q) a_\alpha(p), \hat{H}_{\mathrm{free}}\right] \right\rangle \tag{18}$$

とできる。具体的に、$\hat{H}_{\mathrm{free}}$ の中身の第１項目は

$$\left\langle \left[a_\beta^\dagger(q) a_\alpha(p), \hat{H}_{\mathrm{kin}}\right] \right\rangle \to \left\langle \left[a_\beta^\dagger(q) a_\alpha(p), a_\gamma^\dagger(p') a_\gamma(p')\right] \right\rangle \tag{19}$$

$$= \langle\Psi|\, a_\beta^\dagger(q) a_\alpha(p) \left[a_\gamma^\dagger(p') a_\gamma(p') |\Psi\rangle\right] - \left[\langle\Psi|\, a_\gamma^\dagger(p') a_\gamma(p')\right] a_\beta^\dagger(q) a_\alpha(p) |\Psi\rangle \tag{20}$$

$$= \langle\Psi|\, a_\beta^\dagger(q) a_\alpha(p) \left[n_\gamma(p') |\Psi\rangle\right] - \left[\langle\Psi|\, n_\gamma(p')\right] a_\beta^\dagger(q) a_\alpha(p) |\Psi\rangle \tag{21}$$

$$= 0 \tag{22}$$

として確かに特になにも影響を与えないものであることがわかる。一方で面白いのは第 2 項目の方で、こちらは $\Omega_{\gamma\delta}$ の index によって場合分けされる。$\gamma = \delta$ となるような対角項に対しては、先ほどの第 1 項と同じで数演算子 $\hat{N} = a^\dagger a$ が登場するのでここからの寄与は気にしないでよくなる。残るのは $\gamma \neq \delta$ の非対角成分であり、