

Note: ブロッホ球で見るニュートリノ振動 - フレーバーペンデュラム -

Masamichi Zaizen
(Dated: August 6, 2026)

I. お気持ち

ニュートリノが伝搬する際には、質量の存在により新空中であろうとそのフレーバーが混合することが知られている。その振る舞いは実際に Schrödinger 方程式を解くことで確かに得られるが、かなり真面目に解き進めなければその周期性は見ることはできない。

式ベースの感覚としては、1 階の時間微分方程式なので波動関数が質量に依存する位相 $\propto \exp(i\mathbf{p}[m]t)$ をもつので、異なる質量固有状態の重ね合わせを考えるとその位相間の干渉によるうなりとしてフレーバーが振動するのが見えると捉えることができる。ここでは、この考え方を直接ニュートリノの量子状態の遷移を視覚的に理解するための手法としてブロッホ球を導入する。この手法は、量子論的なニュートリノ振動現象を、フレーバー空間の中での歳差運動として理解してやろうという試みである。これは真空中のニュートリノ振動だけでなく、背景場としての電子やニュートリノなどのレプトンによる屈折作用を記述する上でも直感的な理解に役立つ。本原稿では、まずは簡単な真空振動と物質振動についてまとめることとする。

II. ブロッホ球

ブロッホ球とは、2つの直交する純粋状態（二準位系）の重ね合わせで表現される量子状態を単位球面上に表す記法である。これをニュートリノのフレーバー固有状態に対して適用することを考える。いま考える量子状態として、電子型と非電子型の2フレーバーとして扱うと視覚的にも簡単にニュートリノのフレーバー進化を動力学的に理解することができる¹。ここでは、フレーバーアイソスピンとして、電子型を上向きスピン、非電子型を下向きスピンとした二準位系を考えればいいわけである。フレーバーについて第二量子化を行うと、Fig. 1 のようにそれぞれのフレーバーに対

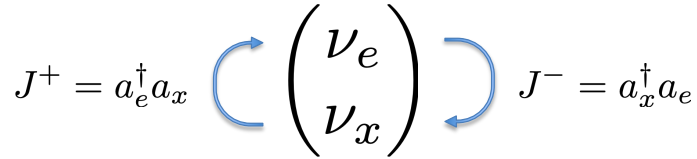


FIG. 1. 二準位系としてのフレーバーアイソスピン

する生成消滅演算子を用いてスピンの向きを変える昇降演算子を確かに定義することができる。このようにフレーバー固有状態を与えてやれば、密度行列

$$\rho_\nu = \begin{pmatrix} f_{ee} & \rho_{ex} \\ \rho_{xe} & f_{xx} \end{pmatrix} \quad (1)$$

を用いてニュートリノを表示できるのもわかるだろう。ここで対角成分がニュートリノのフレーバー固有状態を、非対角成分が異なるフレーバー間のコヒーレント状態（しばしば干渉、相関などとも言われる）を表している。これをブロッホベクトルを用いて書き下してみる。

いまは量子状態としては SU(2) の表現として見るできるので、Pauli 行列を用いて

$$\rho_\nu = \frac{\text{Tr}(\rho)}{2} \mathbb{I}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (2)$$

と分解することができる。このときの展開係数 $\mathbf{P}$ のことを、集団振動コミュニティでは polarization vector と呼んでい

¹ 3 フレーバーでも可能だが、その場合には Gell-Mann 行列を基底とし、SU(3) の構造定数の元での 8 次元空間での運動をを考えなければならない。

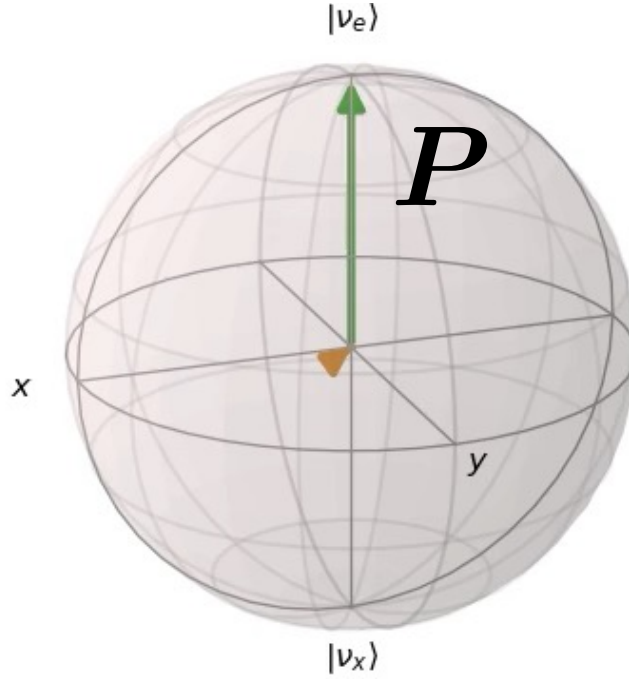
る。それぞれの成分は

$$P_x = P_1 = \text{Re}(\rho_{ex}) \quad (3)$$

$$P_y = P_2 = -\text{Im}(\rho_{ex}) \quad (4)$$

$$P_z = P_3 = f_{ee} - f_{xx} \quad (5)$$

として書き表される²。フレーバー固有状態にいるときには非対角成分の P_x, P_y はゼロであり、 z 軸成分に沿った方向を向いていることがわかる。イメージとしては Fig. 2 のような感じで、もしいまの量子状態として電子型のニュートリノ



Bloch Sphere

FIG. 2. ニュートリノのフレーバー状態のブロッホ球表示

のみだった場合は完全に z 方向上向きになる。こうした x, y, z で表現される状態を、フレーバー空間と呼んだりもする。密度行列が満たす運動方程式は

$$d_t \rho_\nu = -i [\mathcal{H}, \rho_\nu] \quad (6)$$

と書かれるが、これもハミルトニアンを $\mathcal{H} \propto \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ と書き表すことで

$$d_t \left(\frac{\text{Tr}(\rho)}{2} \mathbb{I}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\sigma} \right) = -i \left[\left(\frac{\text{Tr}(\mathcal{H})}{2} \mathbb{I}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma} \right), \left(\frac{\text{Tr}(\rho)}{2} \mathbb{I}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\sigma} \right) \right] \quad (7)$$

$$= -i \left[\frac{1}{2} H_a \sigma_a, \frac{1}{2} P_b \sigma_b \right] \quad (8)$$

$$= \frac{1}{2} H_a P_b \epsilon_{abc} \sigma_c \quad (9)$$

となる。このとき Pauli 行列としての基底ごとに見てあげれば、

$$d_t P_c = \epsilon_{abc} H_a P_b \quad (10)$$

² 数字の 1,2,3 で軸を表す人と、3次元空間としての x, y, z で表す派閥がある。

つまり、

$$d_t \mathbf{P} = \mathbf{H} \times \mathbf{P} \quad (11)$$

と外積の形で簡単に書き下すことができる。この記法は Pauli 行列の交換関係が Levi-Civita 行列で与えられることに起因している。

III. 真空振動 IN フレーバーペンデュラム

これで基本的な記法はわかったので、実際にこれをニュートリノ振動に当てはめてみる。いま、ニュートリノの質量からくるハミルトニアンは

$$\mathcal{H}_{\text{vac}} = \frac{w_E}{2} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} = \frac{w_E}{2} \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (12)$$

としてフレーバー基底で与えられる。ここで $w_E = \frac{m_2^2 - m_1^2}{2E}$ は、質量二乗差で与えられる真空振動の振動数である。このとき真空振動のハミルトニアンの展開係数は

$$\mathbf{B} \equiv (\sin 2\theta, 0, -\cos 2\theta)_{\text{flavor}} = (0, 0, -1)_{\text{mass}} \quad (13)$$

としてフレーバー基底の元で与えられる。ここではあえて質量基底で見た場合も載せているが、これは伝搬のハミルトニアンが質量固有状態で対角化されていることから、質量固有状態でブロッホ球 (x', y', z') を定義した場合に z' 軸方向にこのベクトル $\mathbf{B}$ が向いていることを表している。

このとき真空振動に関する polarization vector の運動方程式は

$$d_t \mathbf{P} = w_E \mathbf{B} \times \mathbf{P} \quad (14)$$

となる。これをブロッホ球で図示してみると、Fig. 3 のように、質量固有状態の基底が角度 2θ だけフレーバー固有状態の基底から傾いたように表される。こうしてみると、ニュートリノの量子状態である polarization vector の振る舞いがすぐにわかるだろう。運動のハミルトニアンのベクトル $\mathbf{B}$ の向きは固定なので、polarization vector がベクトル $\mathbf{B}$ の周りを角周波数 w_E でくるくる回転し続けることになる。

ここで電子ニュートリノの遷移確率は

$$P_{ex} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{P_z}{P_z^i} \right) \quad (15)$$

として、 z 成分の値から得られる。ニュートリノの量子状態が z 軸方向に一番沈んだときの値は

$$\min[P_z] = \cos 4\theta = 1 - 2 \sin^2 2\theta \quad (16)$$

となる。つまり振幅 $2 \sin^2 2\theta$ 、振動数 w_E でくるくる回るわけである。結果として時間経過に対する遷移確率は

$$P_{ex}(t) = \sin^2 2\theta \sin^2 \left(\frac{w_E}{2} t \right) \quad (17)$$

と与えられることとなる。ニュートリノは真空中であろうと伝搬するだけで固有状態の違いによりフレーバーが振動する、とだけ言われると少々わかりづらいかもしれないが、このようにブロッホ球で見てやると直感的にも理解しやすくなる。ニュートリノ振動には他にも物質振動や集団振動など様々な種類が存在しているが、どれもこの polarization vector に則って考えることで、より直感的にそのフレーバーの振動を理解できるようになる。こうした考え方をフレーバーペンデュラム (flavor pendulum) と呼ぶ。

IV. 物質振動 IN フレーバーペンデュラム

ここまでは真空中でのニュートリノの伝搬を考えていたが、今度は物質中に見られる新たな振動現象についてもブロッホ球に基づいて考えてみる。まずは式ベースで考えるが、わかりやすいのは密度行列ではなくそのまま波動関数として

$$\text{id}_t \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \left[U \frac{1}{2E_\nu} \begin{pmatrix} m_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3^2 \end{pmatrix} U^\dagger + \sqrt{2} G_F \begin{pmatrix} n_e & 0 & 0 \\ 0 & n_\mu & 0 \\ 0 & 0 & n_\tau \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} \quad (18)$$

$$= \left[\tilde{U} \frac{1}{2E_\nu} \begin{pmatrix} \tilde{m}_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{m}_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{m}_3^2 \end{pmatrix} \tilde{U}^\dagger \right] \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} \quad (19)$$

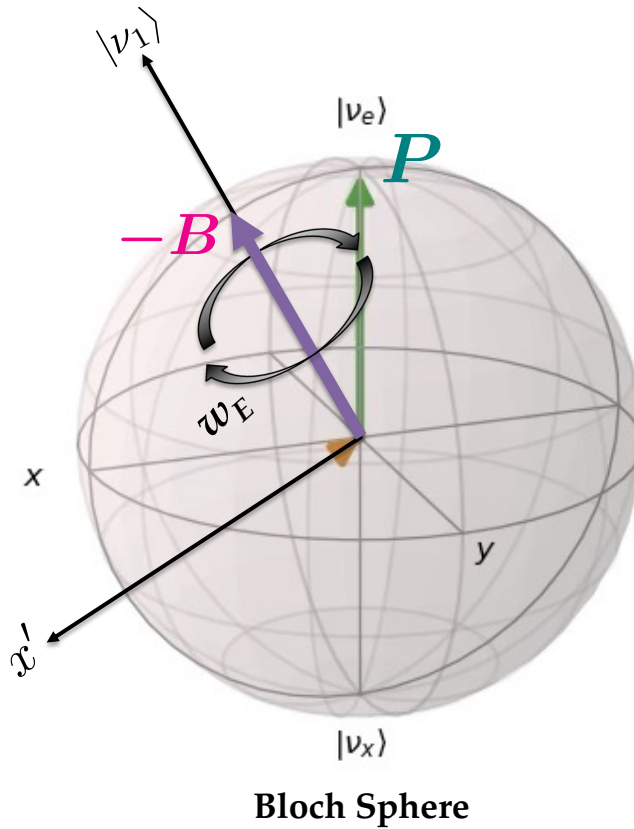


FIG. 3. ブロッホ球における真空振動の概念図

と書いてみると何が起きるかわかりやすい。ハミルトニアンとしては第2項のように荷電レプトン由来の物質振動項が含まれており、2式目ではそれも合わせて質量固有状態に対角化した場合を表現している。ここでもし質量項に対して電子の数密度 n_e が著しく大きかった場合、第1項の寄与はほぼ無視できて、方程式系としてはフレーバーについて対角化されたものになる。つまり時間進化してもフレーバーが変わらないということである。一方で、密度が適度に下がってきて互いの寄与が同程度になったとき、大きくそのフレーバー分布が変わることとなる。これがいわゆる MSW 共鳴と呼ばれるものである。以上の振る舞いを、真空振動同様にブロッホ球で考えてみるというのがここでの趣旨である。

まずは物質振動のハミルトニアンを展開する。実際の天体環境としては基本的にミューオンやタウオンは on-shell ではないと思ってよいので、電子数密度の部分だけを考慮する。そのとき、

$$\mathcal{H}_{\text{mat}} = \frac{\lambda}{2} \mathbf{\Lambda} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (20)$$

として表され、その展開係数も $\mathbf{\Lambda} = (0, 0, 1)_{\text{flavor}}$ と書ける。これは、電子から受けるポテンシャルがフレーバー固有状態で対角化されていることを意味している。まとめると、

$$d_t \mathbf{P} = (w_E \mathbf{B} + \lambda \mathbf{L}) \times \mathbf{P} \quad (21)$$

として、質量基底で対角化された $\mathbf{B}$ と、フレーバー基底で対角化された $\mathbf{L}$ の2種類の回転軸が存在していることになる。このままでは複雑そうに見えるが、簡単に2つのベクトルの合成を考えてやれば良い。つまり

$$d_t \mathbf{P} = w_{\text{eff}} \mathbf{B}_{\text{eff}} \times \mathbf{P}, \quad w_{\text{eff}} \mathbf{B}_{\text{eff}} \equiv w_E \mathbf{B} + \lambda \mathbf{L} \quad (22)$$

として Fig. 4 のように、物質振動の効果により回転振動数と回転軸が実効的にずれたと見れば良いのである。回転軸のベクトルを規格化するように振動数をここまで与えていたので、回転振動数は

$$w_{\text{eff}} = \sqrt{(w_E \sin 2\theta)^2 + (\lambda - w_E \cos 2\theta)^2} \quad (23)$$

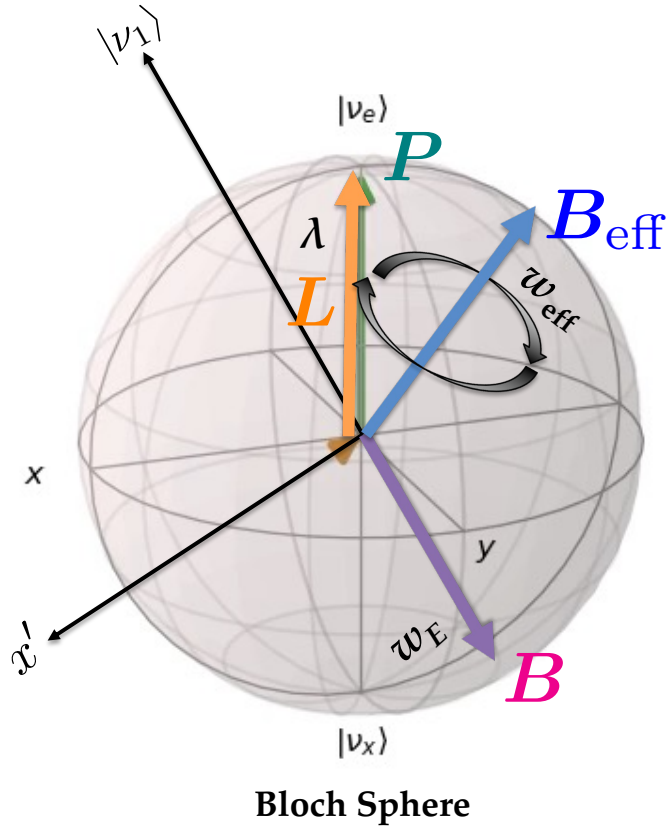


FIG. 4. 物質振動のブロッホ球における概念図

として与えられ、回転軸は

$$\mathbf{B}_{\text{eff}} = (\sin 2\theta_m, 0, -\cos 2\theta_m) \quad (24)$$

$$\sin 2\theta_m = \frac{w_E \sin 2\theta}{w_{\text{eff}}} \quad (25)$$

$$\cos 2\theta_m = \frac{w_E \cos 2\theta - \lambda}{w_{\text{eff}}} \quad (26)$$

として与えることができる。

A. 具体例

実際のシチュエーションとして、いくつか極限などを取ってみて何が起きるか考えてみる。

$\lambda \gg w_E$:

このとき実効的な振動数は $w_{\text{eff}} \sim \lambda$ であり、回転軸も $\mathbf{B}_{\text{eff}} \sim (0, 0, 1)$ となる。つまり真空振動の効果がほぼ無視できて、電子ニュートリノは電子ニュートリノのままフレーバー混合は一切起きないということである。これは物質中における実効的な質量固有状態がフレーバー固有状態と一致した状態にあることを意味しており、実際に混合角も $\theta_m \sim 0$ となっているのである。

$\lambda = w_E \cos 2\theta$:

この場合には回転軸のベクトルが $\cos 2\theta_m = 0$ となるため、完全に z 軸に対して横たわっている状態になる。このときの実効的な混合角は $\theta_m = \pi/4$ であり、最初が電子ニュートリノだけだったとすれば、電子型と非電子型で最大限に混ざっていることを表している。

$\lambda \ll w_E$:

これは自明な状況ではあるが、この場合にはもはや背景場としての電子からのポテンシャルは無視できて、ニュートリノは真空中とほぼ同じような挙動を示すことになる。

このように背景場としての電子数密度によって、ニュートリノ振動の振る舞いは大きく変わる事となる。また、3つに場合分けをしたが、ここで比較をしている対象が真空振動の振動数 w_E であり、これはニュートリノのエネルギーに依存するものである。つまり実際にニュートリノのエネルギー分布を考えたとき、どこでどのような効果を受けるかは、それぞれのニュートリノによって違うものになるということである。

B. 断熱性について

さらに重要なのが、ニュートリノが伝搬する間に背景場の電子数密度が変化する場合である。つまり $\lambda = \lambda(t)$ として変化する場合であり、このときは実効的な振動数も回転軸も時間進化することになる。ニュートリノが生成されたときの環境が $\lambda \gg w_E$ だった場合、 $\mathbf{B}_{\text{eff}}$ は伝搬するに従って、 z 軸方向から、真空中の回転軸 $\mathbf{B}$ へと徐々に傾いていくことになる。もし背景場の電子数密度の勾配が緩やかであれば、ニュートリノもその変化についていきながら量子状態が変化していくだろう。しかしもし急峻な場合、その変化についていくことができず、置いていかれることとなる。つまり断熱性の議論が必要なのである。特に回転軸が $x-y$ 平面を横切るので、それに追従できなかった場合、直接回転軸 $\mathbf{B}$ の周りを回転するのではなく、符号を反転させた $-\mathbf{B}$ の周りを回転することでその後の振る舞いは事足りてしまう。つまりは大きなフレーバー混合を引き起こすことなく、物質中を駆け抜けてしまうのである。このことを特別に non-adiabatic なフレーバー混合と呼び、この MSW 共鳴においては非常に重要なポイントとして知られているものである。

V. おわり

この原稿では、真空振動と物質振動という、線形な効果としてのニュートリノ振動をブロッホ球に基づいてその動力学を解説してきた。ニュートリノ振動という量子論的な振る舞いを、単なるベクトル同士の外積として記述し、フレーバー空間の中での歳差運動 (precession) として扱うことで視覚的に理解しやすくなるのである。

超新星爆発や連星中性子星合体、初期宇宙のような非常に高密度な環境では、さらにニュートリノ同士の自己相互作用による非線形な効果が現れる。この場合においても同様にこのフレーバー空間での議論が活発に行われ、その理解の助けになっている。しかし非線形であるが故にその振る舞いも複雑であり、その詳細についてはまた別途行うこととする。