

Memo: Neutrino Quantum Kinetics

Masamichi Zaizen
(Dated: May 15, 2026)

I. ニュートリノ輸送に対するお気持ち

このノートは、駒場 SN グループにおいて snc-microphy. のグループゼミで発表した内容を、後から式変形を追えるように codex くんを使って清書したものである。場の量子論における propagator からニュートリノ輸送方程式を導き、更にはそこにニュートリノ振動、物質効果、ニュートリノ自己相互作用、衝突項がどのように入るのか整理して。

よくよく考えてみると、ニュートリノは気体分子あるいは液体のような流体というよりかは、もともとは Feynmann ダイアグラムで記述されるべき素粒子である。そういったものが気体分子運動論と同じような古典的な粒子的な描像でその輸送を考えると急に言われても素直に受け入れられるかは疑問である。そこでニュートリノ振動の有無とは別に、いま一度どのようにしてこの素粒子が古典的な Boltzmann 方程式で記述されるのかに立ち戻りつつ、そこにニュートリノ振動としての量子論的な描像を加えることができるかどうかまとめたものである。

超新星爆発や連星中性子星合体のニュートリノ輸送では、粒子が空間を運ばれるという古典的な輸送の側面と、フレーバーが量子力学的に混ざるとい振動の側面を同時に扱う必要がある。通常の古典的輸送では、分布関数 $f_\nu(x, p)$ が Boltzmann 方程式

$$\left(p^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\sigma\kappa}^j p^\sigma p^\kappa \frac{\partial}{\partial p^j} \right) f_\nu = \mathcal{C}[f_\nu] \quad (1)$$

に従う。一方でニュートリノ振動は、Hilbert 空間上の量子状態として Schrödinger 方程式あるいは von-Neumann 方程式

$$i \frac{d}{dt} |\psi_\nu\rangle = \mathcal{H} |\psi_\nu\rangle, \quad i \frac{d\rho_\nu}{dt} = [\mathcal{H}, \rho_\nu] \quad (2)$$

として記述される。量子運動論では、この二つを統一し、位相空間上の密度行列を輸送する。そのため、単に Boltzmann 方程式を思い出すだけでも、単に Schrödinger 方程式を思い出すだけでも足りない。このメモでは、その二つをつなぐ量として lesser Green 関数、および位相空間上の密度行列を見ていく。

II. ニュートリノ振動

実際に輸送方程式に入る前に、伝搬するニュートリノのフレーバーが振動するとはどういうことなのかまずは紹介する。とりあえず、とあるニュートリノの量子状態 $|\psi_\nu\rangle$ について考えてみよう。このニュートリノが、質量に関するハミルトニアンを通して運動（伝搬）する状況と、弱い相互作用を通して観測（反応）された状況を見てみる。このとき、それぞれのハミルトニアンを対角化したときの固有ベクトル（基底）を用いて、質量固有状態あるいはフレーバー固有状態の完全系で、このニュートリノの量子状態を展開することができる。

$$|\psi_\nu\rangle = \sum_{j \in \{1,2,3\}} |\nu_j\rangle \langle \nu_j | \psi_\nu \rangle = \sum_j \psi_{\nu_j} |\nu_j\rangle, \quad (3)$$

$$|\psi_\nu\rangle = \sum_{\alpha \in \{e, \mu, \tau\}} |\nu_\alpha\rangle \langle \nu_\alpha | \psi_\nu \rangle = \sum_\alpha \psi_{\nu_\alpha} |\nu_\alpha\rangle. \quad (4)$$

このとき、 ψ_{ν_j} や ψ_{ν_α} はそれぞれの基底で展開したときの係数、すなわち波動関数に対応している。なのでこれらを二乗してその amplitude を見てあげることで、その量子状態の出現確率を見ることが出来るわけである。しかしここで問題となるのが、弱相互作用で観測される基底と、運動項を対角化する基底が一般に一致するとは限らないということである。つまり、弱い相互作用の固有状態である電子ニュートリノが、運動の固有状態である ν_1 と一致しない、つまりその固有値である質量 m_1 をもつとは限らないということである。これは量子力学を思い出せば、固有ベクトルが一致しないということは、同時対角化できない（あるいはそれぞれのハミルトニアンが交換できない）ことに対応する。

$$|\nu_{\text{kin}}\rangle \neq |\nu_{\text{weak}}\rangle, \quad [H_{\text{kin}}, H_{\text{weak}}] \neq 0. \quad (5)$$

このとき、正規直交基底をなすそれぞれの固有ベクトルはユニタリ行列で変換することができるので、二世近似では、

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = U_{\text{PMNS}} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

のように表されることとなる。また三代では回転行列の積として

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = R(\theta_{23})R(\theta_{13})R(\theta_{12}) \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} \quad (8)$$

と書ける。

実際にこの上で Schrödinger 方程式を考えてやれば良い。単純に非相対論極限における運動のハミルトニアンを考えてみれば、 $\hat{H} = \hat{p}^2/2m$ として質量に依存する。したがって、例え生まれたときに電子型のニュートリノだったとしても、伝搬する間にその重ね合わせである質量固有状態の位相がこの質量の違いだけずれていき、再び弱い相互作用で観測しようとしてもその振幅の重ね合わせが異なってしまうわけである。そのとき真空中を伝搬するニュートリノの二世代振動確率は

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu} = \sin^2 2\theta \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E_\nu} \right) \quad (9)$$

として確かに伝搬に応じて振動する様子を示すのである。

III. 場の量子論から PROPAGATOR へ

前セクションで伝搬するニュートリノのフレーバー混合についてはわかったので、今度はニュートリノがどのようにして輸送されるのか考えてみる。出発点は Dirac 方程式である。

$$(i\not{\partial} - m) \psi(x) = 0. \quad (10)$$

このとき自由 propagator は

$$(i\not{\partial}^x - m) G_0(x, y) = i\delta^{(4)}(x - y) \quad (11)$$

を満たす。これは二点間の相関関数として表すこともできるため、time-ordering symbol を用いて

$$G_0(x, y) = \langle T \bar{\psi}(y) \psi(x) \rangle \quad (12)$$

と表すこともできる。このように表してみると、確かにこの Green 関数がある時空 x から y まで素粒子が移動することを意味するので、うまいことやればここから輸送方程式が得られそうである。

ただし、ここで知りたいのは真空から真空への遷移振幅としての普通の propagator そのものではない。ニュートリノ輸送 (Boltzmann 方程式) で必要なのは、媒質中の ensemble に対する粒子数、すなわち密度行列や分布関数である。したがって計算すべき量は in-out の行列要素ではなく、演算子の期待値

$$\langle \hat{O}(t) \rangle = \langle \Phi(t) | \hat{O} | \Phi(t) \rangle \quad (13)$$

$$= \langle 0 | U(t, t_0)^\dagger \hat{O} U(t, t_0) | 0 \rangle \quad (14)$$

$$= \langle 0 | U(t_0, t) \hat{O} U(t, t_0) | 0 \rangle \quad (15)$$

である。これは状態を t_0 から t へ発展させ、演算子を挿入した後、さらに t から t_0 へ戻す構造を持つ。そのため、輸送方程式としての非平衡系では、時間軸を一方向に進む経路だけでなく、行って帰ってくる閉じた時間経路 (図 1) を同時に考える必要がある。これが Closed Time Path (CTP), あるいは Schwinger-Keldysh 形式と呼ばれるものになる。

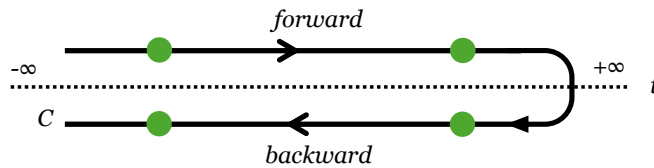


FIG. 1. Closed Time Path における経路の概念図。

CTP では場を forward branch (+) と backward branch (-) のどちらに置くかで Green 関数を行列として表すことができる。

$$G^{ab}(x, y) = \langle T_C \psi_a(x) \bar{\psi}_b(y) \rangle, \quad a, b \in \{+, -\}. \quad (16)$$

このとき、同じ時刻の点であっても、forward 側の点は backward 側の点よりも先に現れる演算子になることに注意が必要である。そのため、同じ branch 上の成分が通常の time ordering, anti-time ordering propagator に対応するだけでなく、異なる branch に置いた成分として lesser/greater Green 関数と呼ばれるものも定義できるはずである。要は forward から backward に向かう成分とその逆の成分があるということである。結果として、CTP で「行き」と「帰り」の経路を同時に扱う結果として、 $G^<$ と $G^>$ の二つを同時に考える必要が出てくる。この辺の詳細については、Appendix A を参照されたい。色々概念を導入したが、これによって得られる恩恵としては、次のように Green 関数を分布関数へと変換できるような形を抽出できるのである。

$$G_0^<(x, y) = \langle \bar{\psi}(y) \psi(x) \rangle \quad (17)$$

$$\propto \langle a^\dagger(\mathbf{q}) a(\mathbf{p}) \rangle \quad (18)$$

$$\rightarrow f(\mathbf{p}), \quad (19)$$

$$iG_0^>(x, y) = \langle \psi(x) \bar{\psi}(y) \rangle \quad (20)$$

$$\propto \langle a(\mathbf{p}) a^\dagger(\mathbf{q}) \rangle \quad (21)$$

$$\propto 1 - \langle a^\dagger(\mathbf{q}) a(\mathbf{p}) \rangle \quad (22)$$

$$\rightarrow 1 - f(\mathbf{p}). \quad (23)$$

ここで $G^<$ は $a^\dagger a$ 型の ensemble 平均を含むので占有数 f を表し、 $G^>$ は $aa^\dagger = 1 - a^\dagger a$ 型の平均を含むので、空き状態の重み、すなわち Pauli blocking 因子 $1 - f$ を表す。もう少しイメージをわかりやすくしてみるならば、number operator が

$$\hat{N} |n\rangle = \hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle = n |n\rangle \quad (24)$$

として与えられていたことを思い出せばいい。Ensemble 平均として、あらゆる運動量に対する粒子の数を足し上げていけば、運動量空間におけるヒストグラムが得られることになる。これが分布関数そのものであり、lesser/greater 成分が ensemble 中の粒子数と blocking を直接運ぶことのが見えるようになるのである。

IV. WIGNER 変換と運動方程式

先ほど定義した lesser Green 関数は自由場では左右から Dirac 方程式を満たす。

$$(i\overleftarrow{\partial}^x - m) G_0^<(x, y) = 0, \quad (25)$$

$$G_0^<(x, y) \left(-i\overleftarrow{\partial}^y - m \right) = 0. \quad (26)$$

このうち右作用の方程式は、自由場での輸送方程式を出すのには使わないが、のちに衝突項やニュートリノ振動などの自己エネルギー由来の成分を導入する際に必要となるので載せてある。

さて、いま最終的に欲しいのは相空間中の分布関数 $f(x, p)$ であり、二点相関ではない。そこで中心座標 $X = (x + y)/2$ と相対座標 $s = x - y$ を導入し、そのうち相対座標を Fourier 変換することで運動量を explicit に見えるようにする。イメージとしても、この相対座標がある意味で、二点間の運動のベクトルの向きだと思えば、この相対座標の Fourier 変換が運動量に相当するのは理解できるだろう。このとき lesser Green 関数は

$$G_0^<(X, p) = \int d^4s e^{ip \cdot s} G_0^<\left(X + \frac{s}{2}, X - \frac{s}{2}\right) \quad (27)$$

として Wigner 変換される。

その上で、式 (25) に対して左ないし右から $(i\overleftarrow{\partial} + m)$ を作用させてやると

$$(p^2 - m^2 + ip^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu^X) G_0^<(X, p) = 0, \quad (28)$$

$$G_0^<(X, p) \left(p^2 - m^2 - i\overleftarrow{\partial}_\mu^X p^\mu \right) = 0. \quad (29)$$

を得る。このとき、作用の部分の実部と虚部をそれぞれ見てやると、実部側は $p^2 = m^2$ としていま考えている粒子の on-shell 条件が、虚部側からは運動方程式が出てくるのがわかる。ただしこのままでは基本変数が lesser Green 関数であって我々が最終的に知りたい分布関数で見た輸送方程式でないので、最後にその変換を考える。

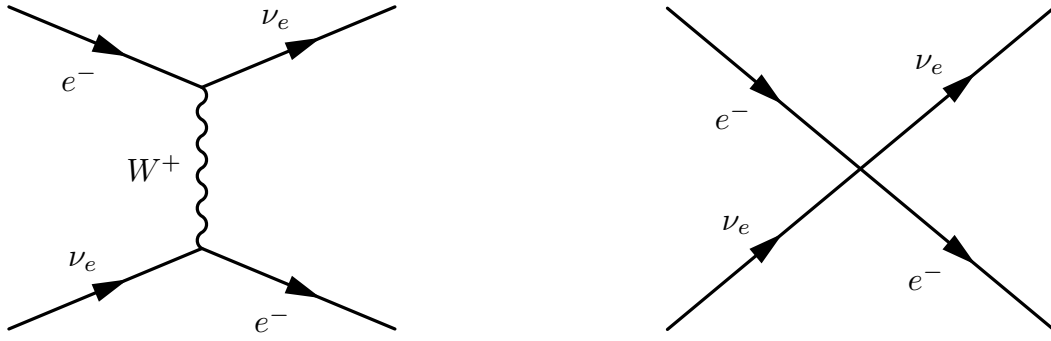


FIG. 2. ニュートリノ電子散乱の Feynman ダイアグラム。左は W ボソンあり、右は低エネルギー極限における4点相互作用に対応する。

lesser Green 関数を与えたところで、おおよそこれが数演算子の ensemble になっているという話をした。じゃあ何が違っているのか、あるいは何が要素として Green 関数に含んでいるのか考えてやる必要がある。いま考えている粒子はニュートリノであり、これはもともと spinor で表される場の演算子であった。つまり、この ensemble としての Green 関数にも spinor 由来の要素が含まれているはずである。いま一度場の演算子の中身を見てみると

$$\psi(x) = \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E}} [a_s(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p})e^{-ipx} + b_s^\dagger(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p})e^{+ipx}] \quad (30)$$

となっている。これを ensemble な Green 関数にすると、

$$\langle a_{s'}^\dagger(\mathbf{p}')a_s(\mathbf{p}) \rangle u_s(\mathbf{p})\bar{u}_{s'}(\mathbf{p}') \quad (31)$$

という要素が含まれるはずである。これを spin 平均をとれば、

$$u_s(\mathbf{p})\bar{u}_{s'}(\mathbf{p}') \rightarrow \not{p} + m \quad (32)$$

として運動量表示の Dirac 演算子の部分が見える。これが分布関数を得る上では、Green 関数の中に余分含まれているはずである。

というわけで、分布関数を得るためにその辺を explicit に書き出すと（準粒子近似を置くと）

$$G_0^<(X, p) \simeq 2\pi\delta(p^2 - m^2)(\not{p} + m)f(X, p) \quad (33)$$

となり、結果として on-shell 条件と自由場での輸送

$$p^\mu \partial_\mu^X f(X, p) = 0 \quad (34)$$

が得られる。これがニュートリノに対する (collisionless) Boltzmann 方程式であり、確かに古典的な粒子と同じ記法になることがわかった。

V. 媒質中の PROPAGATOR と自己エネルギー

一般に天体内部でのニュートリノ輸送を考える上では、他の粒子との相互作用としての衝突過程を組み込む必要がある。これも単なる古典的な粒子同士の散乱というよりかは、Feynman ダイアグラムにおける相互作用として描かれるべきなものである。低エネルギー極限では、 W/Z 交換は有効四点相互作用で表される。例えばニュートリノ・電子散乱に対応する有効相互作用は図2のように描かれる。この4点相互作用を current-current 相互作用としてラグランジアンを書いてやれば

$$\mathcal{L}_{\text{NES}} \sim G_F j_\nu^\mu J_\mu^{\text{med}} \quad (35)$$

となるはずである。実際にニュートリノへの相互作用を計算する上では、結合定数に対する摂動展開を行なってやれば評価することができるわけである。摂動展開の一次項は媒質カレントの期待値、すなわちポテンシャルを与える。

$$1\text{st} \sim G_F \int d^4x j_\nu^\mu(x) J_\mu^{\text{med}}(x), \quad (36)$$

$$\rightarrow \langle J_\mu^{\text{med}}(x) \rangle. \quad (37)$$

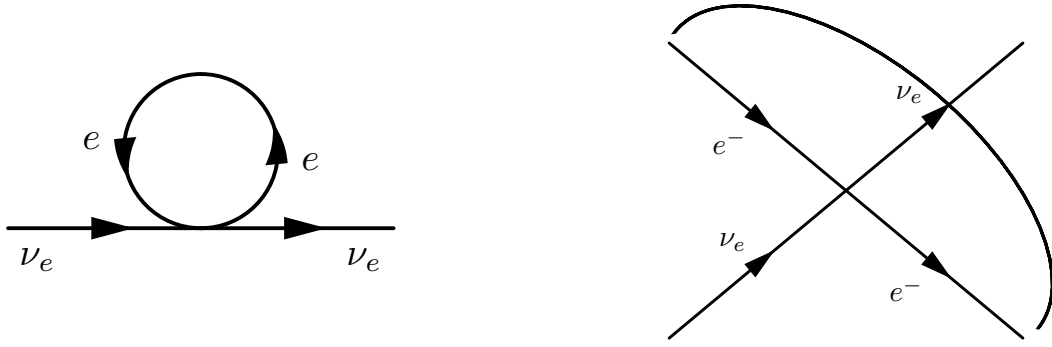


FIG. 3. ニュートリノ電子散乱の摂動1次の Feynman ダイアグラム。左が tadpole 型としてのポテンシャルで、右が元々の4点相互作用においてニュートリノ以外の背景物質の外線を繋いで丸めるイメージ図を表している。

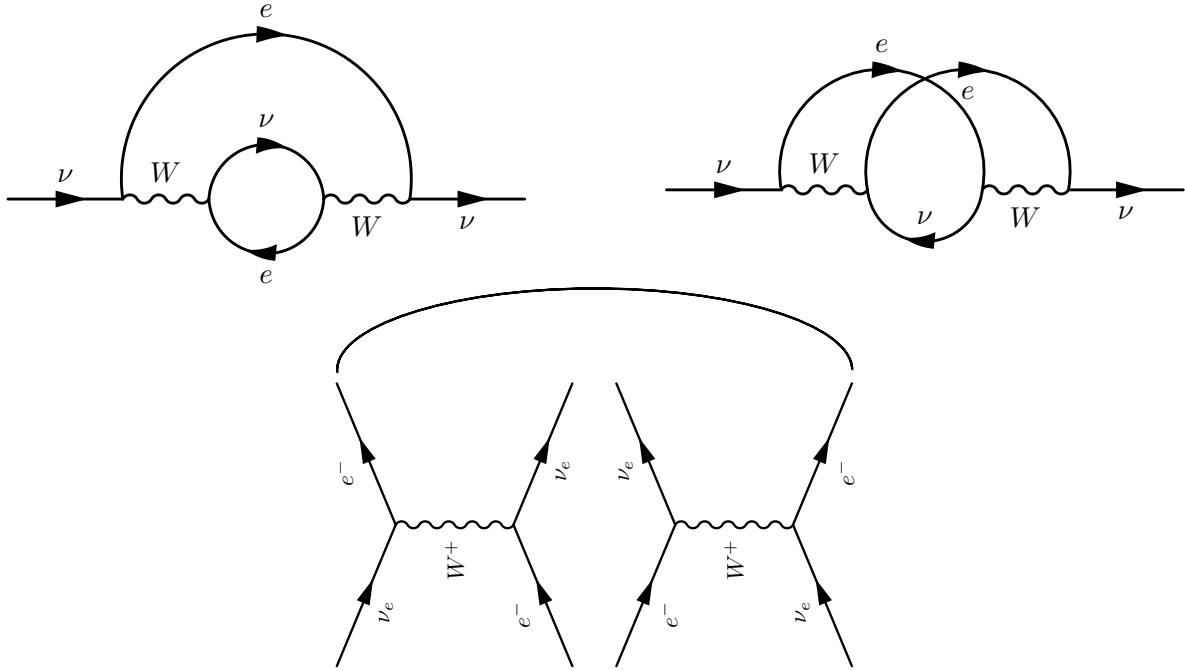


FIG. 4. ニュートリノ電子散乱の摂動2次の Feynman ダイアグラム。上2つがニュートリノが一旦別粒子へと変化した後にまたニュートリノへと戻るような確率過程としての衝突を示すダイアグラムである。下は摂動2次として、うまくニュートリノの外線だけを残すように2つの4点相互作用同士を繋ぐイメージを表している。

このイメージとしては、図3を見てやればよい。最終的にはニュートリノの伝搬を見たいのであって、その他の物質の外線（その量子状態）には興味がない。なので元々の4点相互作用のダイアグラムのうち電子の外線を繋いで丸めてやることでポテンシャルとしての ensemble が得られるというわけである。こうして見ると、ニュートリノの伝搬としての Green 関数に self-energy として tadpole 型のループがくっついていると思えるわけである。

続いて摂動二次項は媒質相関関数を含み、衝突項へとつながるようになる。

$$2\text{nd} \sim \frac{G_F^2}{2} \int d^4x d^4y j_\nu^\mu(x) J_\mu^{\text{med}}(x) j_\nu^\sigma(y) J_\sigma^{\text{med}}(y), \quad (38)$$

$$\rightarrow \langle J_\mu^{\text{med}}(x) J_\sigma^{\text{med}}(y) \rangle. \quad (39)$$

こちらも摂動1次と同様で、2つの vertex（結合定数）を持つように、2つのダイアグラムを繋いで自己エネルギーを持つようなニュートリノの propagator へと描き直せばよい。そのイメージは図4を参考にすればよくて、この場合には2パターンのだいagramが考えられる。こちらは摂動1次のときは異なり、途中でニュートリノの外線が別の粒子に変換されるなど、媒質としての電子への応答が発生している。これが媒質カレントの2点相関として現れるのである。

こうしたニュートリノが相互作用しながら伝搬していく描像は、自己エネルギー Σ を用いて、Dyson 方程式から exact

propagator が

$$\tilde{G}(p) = \tilde{G}_0(p) + \tilde{G}_0(p)\tilde{\Sigma}(p)\tilde{G}(p) \quad (40)$$

として表される。右辺が propagator が並んでダイアグラムの繋がりを持っている様子を表しているが、これを両側から割ることで

$$\tilde{G}^{-1}(p) = \tilde{G}_0^{-1}(p) - \tilde{\Sigma}(p) \quad (41)$$

として別々に分けて表記することもできる。Green 関数自体が元の Dirac 方程式の演算子の逆であったので、逆の逆としてこれがそもそもの Dirac 方程式に対して自己エネルギーがシフトを与えているとわかるだろう。その意味では、摂動 1 次がポテンシャルになるというのも、ある種のエネルギーシフト的な意味でのポテンシャルだと理解しやすいはずである。

また、位置空間で書けば Kadanoff-Baym 方程式として

$$(i\partial^x - m)G(x, y) - \int d^4z \Sigma(x, z)G(z, y) = i\delta^{(4)}(x - y) \quad (42)$$

が得られる。この自己エネルギーの部分がある種の畳み込み ($\Sigma \circ G$) になっているわけである。ここの部分を真面目に評価していくことで、

$$\Sigma^<G^> - \Sigma^>G^< \sim j(1 - f) - \kappa f \quad (43)$$

のような見慣れた (gain-loss) の形が得られるわけである。ここ評価には CTP に従って色々と操作をしなければならないので、これも Appendix B を参照されたい。

VI. PROPAGATOR 表現での真空振動

ここまでは古典的なニュートリノの輸送方程式であった。今度はここに伝搬するだけでフレーバーが混合するニュートリノ振動の要素を組み込むことを考える。ただし出発点としては同じで Dirac 方程式から propagator を考えてやれば良い。

フレーバー状態は質量状態の重ね合わせであるので

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_j U_{\alpha j} |\nu_j\rangle \quad (44)$$

$$\Rightarrow a_\alpha^\dagger |0\rangle = \sum_j U_{\alpha j} a_j^\dagger |0\rangle. \quad (45)$$

として生成消滅演算子が PMNS 行列で回転できるはずである。したがって、lesser Green 関数のフレーバー成分は

$$G_{\alpha\beta}^< = \langle \bar{\psi}_\beta \psi_\alpha \rangle \propto \langle a_\beta^\dagger a_\alpha \rangle \propto \rho_{\alpha\beta} \quad (46)$$

と密度行列に対応するのがわかる。これは単純に、ある時空 x で生まれたフレーバー α の粒子がある時空 y まで伝搬し消滅したと考えているだけである。

質量基底からフレーバー基底への変換は両側から作用させればよいので

$$G_{\alpha\beta}^< = \sum_{j,l} U_{\alpha j} G_{jl}^< U_{\beta l}^\dagger \quad (47)$$

と与えられる。ここで Green 関数は spinor 空間と Hilbert 空間の直積空間上で定義されるもの

$$G \in \text{spinor space} \otimes \text{flavor space} \quad (48)$$

である一方、 U は spinor 空間には作用せずフレーバー空間に作用するユニタリ行列

$$U : \mathbb{1}_{\text{spinor}} \otimes (3 \times 3) \quad (49)$$

であることに注意する必要がある。

いま自由場での propagator を考えると、質量基底では

$$(i\cancel{\partial}^x - M_m)G_{0,m}(x, y) = i\delta^{(4)}(x - y), \quad (50)$$

$$\text{where } M_m = \text{diag}(m_1, m_2, m_3) \quad (51)$$

として各質量固有状態に対する Dirac 方程式が対角化されて並べられて表現されるはずである。ここで下付き添え字 m は質量固有状態を見ていることを表している。先ほど述べたように PMNS 行列 U は spinor 空間には作用せず、フレーバー空間で質量基底からフレーバー基底へ移す行列である。 U はもちろん時空座標に依存しないので、この式に左から U 、右から U^\dagger を掛けると、

$$U(i\cancel{\partial}^x - M_m)G_{0,m}(x, y)U^\dagger = i\delta^{(4)}(x - y)\mathbb{1}_f \quad (52)$$

となる。左辺を項ごとに展開すると、

$$U(i\cancel{\partial}^x)G_{0,m}U^\dagger - UM_mG_{0,m}U^\dagger = i\delta^{(4)}(x - y)\mathbb{1}_f \quad (53)$$

$$\Rightarrow i\cancel{\partial}^x (UG_{0,m}U^\dagger) - UM_mG_{0,m}U^\dagger = i\delta^{(4)}(x - y)\mathbb{1}_f \quad (54)$$

ここで質量項には恒等式 $U^\dagger U = \mathbb{1}_m$ を挿入することで

$$UM_mG_{0,m}U^\dagger = UM_m(U^\dagger U)G_{0,m}U^\dagger \quad (55)$$

$$= (UM_mU^\dagger)(UG_{0,m}U^\dagger) \quad (56)$$

と書き換えることができる。したがってフレーバー固有状態を表す下付き添え字 f を導入し、

$$G_{0,f}(x, y) \equiv UG_{0,m}(x, y)U^\dagger, \quad M_f \equiv UM_mU^\dagger \quad (57)$$

を定義すれば、

$$i\cancel{\partial}^x G_{0,f}(x, y) - M_f G_{0,f}(x, y) = i\delta^{(4)}(x - y)\mathbb{1}_f \quad (58)$$

すなわち

$$(i\cancel{\partial}^x - UM_mU^\dagger)G_{0,f}(x, y) = i\delta^{(4)}(x - y)\mathbb{1}_f \quad (59)$$

となる。

Wigner 変換後、質量二乗行列を用いて

$$M_m^2 = \text{diag}(m_1^2, m_2^2, m_3^2) \quad (60)$$

と書けば、

$$(p^2\mathbb{1}_f - UM_m^2U^\dagger + ip^\mu\partial_\mu^X\mathbb{1}_f)G_{0,f}^<(X, p) = 0, \quad (61)$$

$$G_{0,f}^<(X, p) \left(p^2\mathbb{1}_f - UM_m^2U^\dagger - i\overleftarrow{\partial}_\mu^X p^\mu\mathbb{1}_f \right) = 0 \quad (62)$$

を得る。左右作用の差を取ることで、真空振動項

$$p^\mu\partial_\mu^X G_{0,f}^<(X, p) = -\frac{i}{2} \left[UM_m^2U^\dagger, G_{0,f}^< \right] \quad (63)$$

が出る。相対論的極限で $p_0 \simeq |\mathbf{p}|$ とし、 $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{p}/p_0$ を用いれば

$$(\partial_t + \hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla_X)G_{0,f}^<(X, p) = -i \left[\frac{UM_m^2U^\dagger}{2p_0}, G_{0,f}^< \right] \quad (64)$$

すなわち

$$\mathcal{H}_{\text{vac}} = \frac{UM_m^2U^\dagger}{2p_0} \quad (65)$$

が真空振動の Hamiltonian として現れる。

VII. 物質項とニュートリノ自己相互作用

媒質効果は、空間表示の Dyson 方程式に現れる自己エネルギー項から衝突項と似たような流れで導入できる。真空振動までをフレーバー基底で書いた式に自己エネルギーを加えると、

$$(i\partial^x - UM_m U^\dagger) G_f(x, y) - \int d^4z \Sigma_f(x, z) G_f(z, y) = i\delta^{(4)}(x - y) \not{x}_f \quad (66)$$

である。ここで Σ_f のうち、媒質の平均場として働く局所的な成分をポテンシャル V として

$$\Sigma_f^{\text{mf}}(x, z) \simeq V(x)\delta^{(4)}(x - z) \quad (67)$$

と近似すれば、畳み込み積分は

$$\int d^4z \Sigma_f^{\text{mf}}(x, z) G_f(z, y) \simeq V(x) G_f(x, y) \quad (68)$$

と丸められる。したがって、平均場成分は Dirac operator の中に

$$(i\partial^x - UM_m U^\dagger - V(x)) G_f(x, y) = i\delta^{(4)}(x - y) \not{x}_f \quad (69)$$

として組み込まれる。つまり、 V は質量項 $UM_m U^\dagger$ と同じくフレーバー空間の行列として G_f に左から作用する。この局所平均場部分が物質項・ニュートリノ自己相互作用項になり、非局所な残りの自己エネルギーは後で衝突項を作る。このポテンシャルとしての表現は、衝突項を与えたときの摂動展開の1次で見かけた tadpole に対応している。

媒質中の摂動1次の自己エネルギーは

$$1\text{st} \sim G_F \int d^4x j_\nu^\mu(x) J_\mu^{\text{med}}(x) \rightarrow \langle J_\mu^{\text{med}}(x) \rangle \quad (70)$$

となり、フレーバー基底の方程式に

$$V_{\text{mat}} = \sqrt{2}G_F \langle J_{\text{mat}} \rangle \sim \sqrt{2}G_F \begin{pmatrix} n_{e^-} - n_{e^+} & 0 & 0 \\ 0 & n_{\mu^-} - n_{\mu^+} & 0 \\ 0 & 0 & n_{\tau^-} - n_{\tau^+} \end{pmatrix} \quad (71)$$

を加えることに相当する。Wigner 変換後、左右作用の差を取ると、 V も真空振動項と同様に commutator として現れる。これにより

$$(\partial_t + \hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla_X) G_f^< = -i \left[\frac{UM_m^2 U^\dagger}{2p_0} + V_{\text{mat}}, G_f^< \right] \quad (72)$$

を得る。

背景となるのは電子だけでなく、ニュートリノ自身もなりうる。同じように操作していくと、ニュートリノ自己相互作用は背景ニュートリノの密度行列をポテンシャルとして見る。

$$V_{\nu\nu} = \sqrt{2}G_F \langle J_\nu \rangle \sim \sqrt{2}G_F \begin{pmatrix} \langle \nu_e | \nu_e \rangle & \langle \nu_e | \nu_\mu \rangle & \langle \nu_e | \nu_\tau \rangle \\ \langle \nu_\mu | \nu_e \rangle & \langle \nu_\mu | \nu_\mu \rangle & \langle \nu_\mu | \nu_\tau \rangle \\ \langle \nu_\tau | \nu_e \rangle & \langle \nu_\tau | \nu_\mu \rangle & \langle \nu_\tau | \nu_\tau \rangle \end{pmatrix} \quad (73)$$

したがって、衝突を除いた量子運動論の構造は

$$(\partial_t + \hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla_X) G_f^< = -i \left[\mathcal{H}_{\text{vac}} + V_{\text{mat}} + V_{\nu\nu}, G_f^< \right] \quad (74)$$

である。

VIII. 衝突項

最後に、衝突項もまたフレーバー空間で定義しなおさなければならない。前節の物質項・自己相互作用項では、自己エネルギーの局所平均場部分を $\Sigma_f^{\text{mf}}(x, z) \simeq V(x)\delta^{(4)}(x - z)$ とみなし、Dyson 方程式の Dirac operator の中へポテン

シャルとして吸収した。一方で衝突項は、摂動展開の二次以降に現れる非局所な自己エネルギーから生じる。この違いは、ダイアグラムで見ると tadpole 型の 1PI 自己エネルギーと、2PI 自己エネルギーの違いに対応する。

相互作用を

$$S_{\text{int}} \sim G_{\text{F}} \int d^4x j_{\nu}^{\mu}(x) J_{\mu}^{\text{med}}(x) \quad (75)$$

として摂動展開すると、二次では

$$\frac{G_{\text{F}}^2}{2} \int d^4x d^4z j_{\nu}^{\mu}(x) J_{\mu}^{\text{med}}(x) j_{\nu}^{\sigma}(z) J_{\sigma}^{\text{med}}(z) \quad (76)$$

が現れ、媒質自由度を平均すると

$$G_{\text{F}}^2 j_{\nu}^{\mu}(x) j_{\nu}^{\sigma}(z) \langle J_{\mu}^{\text{med}}(x) J_{\sigma}^{\text{med}}(z) \rangle \quad (77)$$

という二つのカレントの二点相関が残る。この相関は一般に $x = z$ に比例するデルタ関数ではなく、媒質中で粒子が実際に散乱される過程の確率振幅を含んでいる。したがって

$$\Sigma_f^{2\text{PI}}(x, z) \neq V(x) \delta^{(4)}(x - z) \quad (78)$$

であり、Dirac operator に単純なポテンシャルとして吸収することはできない。その代わりに、Dyson/Kadanoff–Baym 方程式の非局所な畳み込み

$$\int d^4z \Sigma_f^{2\text{PI}}(x, z) G_f(z, y) \quad (79)$$

として残り、Wigner 変換後に gain–loss 型の衝突項を与える。

衝突を含む場合、フレーバー基底の逆 propagator は

$$\tilde{G}_f^{-1}(p) = \tilde{G}_{0,f}^{-1}(p) - \tilde{\Sigma}_f(p) \quad (80)$$

と表され、畳み込み項は

$$\int d^4z \Sigma(x, z) G(z, y) \rightarrow \int d^4z \Sigma_f(x, z) G_f(z, y) \quad (81)$$

へ拡張される。Kadanoff–Baym 方程式の lesser/greater 成分から、Boltzmann 型の gain–loss 構造

$$\mathcal{C} = \Sigma_f^< G_f^> - \Sigma_f^> G_f^< \quad (82)$$

が現れる。

たとえば、吸収・放出過程では、対角成分は通常の population を変化させ、非対角成分はフレーバー相関を減衰させる。2 フレーバーの概略形は

$$\mathcal{C}[\rho] = \begin{pmatrix} R_{\text{emi}}(1 - \rho_{ee}) - R_{\text{abs}}\rho_{ee} & -\frac{1}{2}(R_{\text{emi}} + R_{\text{abs}})\rho_{ex} \\ -\frac{1}{2}(R_{\text{emi}} + R_{\text{abs}})\rho_{xe} & 0 \end{pmatrix} \quad (83)$$

となる。特にフレーバー非対角成分については

$$\mathcal{C}_{\alpha\beta} \propto -\rho_{\alpha\beta} \quad (\alpha \neq \beta) \quad (84)$$

となり、弱い相互作用を介した反応はフレーバー間のコヒーレンスを弱めることになる。元の gain–loss の構造を見返したとき、Pauli blocking term のうち $1 - f$ の 1 の部分には非対角項はない。つまり全体としては、 $\mathcal{C}_{ab} \sim -(j + \kappa)\rho_{ab}$ として負の値をもつことになるのがわかるだろう。これは衝突は古典的な population だけでなく、量子的な off-diagonal coherence も扱う必要があるという結論に対応する。

IX. 最終形

以上をまとめると、ニュートリノ量子運動論は、位相空間上のフレーバー密度行列または lesser Green 関数に対して

$$(\partial_t + \hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla_X) G_f^<(X, p) = -i \left[\mathcal{H}_{\text{vac}} + V_{\text{mat}} + V_{\nu\nu}, G_f^<(X, p) \right] + \mathcal{C}[G_f^<] \quad (85)$$

という形に整理できる。左辺は古典的な輸送、右辺第一項は量子振動、右辺第二項は量子統計的衝突過程を表す。

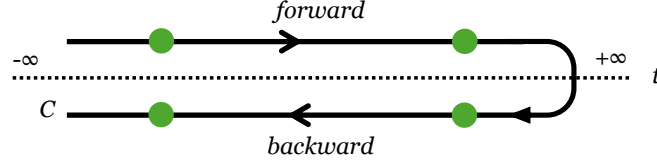


FIG. 5. Closed Time Path における経路の概念図。

Appendix A: Closed Time Path 形式の補足

本文では、ensemble 平均を扱うために Closed Time Path (CTP) を導入し、その結果として lesser/greater Green 関数が現れることだけを述べた。ここでは、その対応をもう少し丁寧に整理しておく。改めて図 5 として CTP の経路を載せておく。

非平衡系で知りたい量は、真空から真空への遷移振幅ではなく、初期時刻 t_0 で与えられた密度演算子 ρ_0 に対する期待値である。したがって時間発展は、過去から未来へ進む発展演算子と、その後未来から過去へ戻る発展演算子を同時に含む。これを経路として表したものが

$$C = C_+ \cup C_-, \quad C_+ : t_0 \rightarrow +\infty, \quad C_- : +\infty \rightarrow t_0 \quad (\text{A1})$$

である。ここで C_+ を上側の branch、 C_- を下側の branch と呼ぶ。CTP 上の ordering T_C は、通常の時刻の大小ではなく、経路 C に沿って後に現れる演算子を左に置く操作である。したがって図 5 の緑点に注目してみると、物理的な時刻が同じでも、下側 branch 上の点は上側 branch 上の点よりも contour 上では後にある。

CTP では、同じ場を二つの branch 上に複製して

$$\psi(x) \rightarrow \psi_a(x), \quad a \in \{+, -\} \quad (\text{A2})$$

と書く。このとき contour ordered Green 関数は

$$G^{ab}(x, y) = \langle T_C \psi_a(x) \bar{\psi}_b(y) \rangle, \quad a, b \in \{+, -\} \quad (\text{A3})$$

として定義される。二点 x, y をそれぞれ上側・下側のどちらの branch に置くかで

$$G_C(x, y) = \begin{pmatrix} G^{++}(x, y) & G^{+-}(x, y) \\ G^{-+}(x, y) & G^{--}(x, y) \end{pmatrix} \quad (\text{A4})$$

という 2×2 行列構造が現れる。これが Keldysh 形式での二点相関関数である。

この四つの成分がそれぞれどの Green 関数に対応するかは、branch 上の順序を考えると分かる。まず、 G^{++} では二点 x, y がどちらも上側 branch C_+ にある。 C_+ は通常的时间と同じ向きに t_0 から未来へ進むので、contour 上で後にある点は物理時刻の大きい点である。したがって T_C は普通の time ordering T と同じになり、 $G^{++} = G^T$ となる。一方で、 G^{--} では二点がどちらも下側 branch C_- にある。 C_- は未来から過去へ戻る経路なので、contour 上で後にある点は物理時刻の小さい点である。そのため T_C は通常的时间順序とは逆に働き、 $G^{--} = G^{\bar{T}}$ 、すなわち anti-time-ordered Green 関数になる。

非対角成分では、二点は異なる branch に置かれる。CTP は C_+ を最後まで進んでから C_- に入るため、物理時刻の値によらず、下側 branch 上の点は上側 branch 上の点よりも contour 上で後にある。したがって

$$G^{+-}(x, y) = \langle T_C \psi_+(x) \bar{\psi}_-(y) \rangle \rightarrow \langle \bar{\psi}(y) \psi(x) \rangle \equiv iG^<(x, y), \quad (\text{A5})$$

$$G^{-+}(x, y) = \langle T_C \psi_-(x) \bar{\psi}_+(y) \rangle \rightarrow \langle \psi(x) \bar{\psi}(y) \rangle \equiv iG^>(x, y). \quad (\text{A6})$$

重要なのは、 $+-$ 成分では下側 branch にある $\bar{\psi}(y)$ が必ず左に来るため lesser になり、 $-+$ 成分では下側 branch にある $\psi(x)$ が必ず左に来るため greater になる、という点である。

各成分の意味は次のように整理できる。

$$G_C(x, y) = \begin{pmatrix} G^T(x, y) & G^<(x, y) \\ G^>(x, y) & G^{\bar{T}}(x, y) \end{pmatrix}. \quad (\text{A7})$$

すなわち、同じ上側 branch に二点を置いた G^{++} は通常の時刻順序 Green 関数 G^T であり、同じ下側 branch に二点を置いた G^{--} は anti-time-ordered Green 関数 $G^{\bar{T}}$ である。一方で、異なる branch に二点を置いた非対角成分が

$$G^{+-}(x, y) = G^<(x, y), \quad G^{-+}(x, y) = G^>(x, y) \quad (\text{A8})$$

に対応する。本文で用いた規約では

$$G^<(x, y) = \langle \bar{\psi}(y) \psi(x) \rangle, \quad (\text{A9})$$

$$G^>(x, y) = \langle \psi(x) \bar{\psi}(y) \rangle \quad (\text{A10})$$

であり、 $G^<$ が占有数、 $G^>$ が空き状態の重み、すなわち Pauli blocking 因子を運ぶ。

通常の time ordering と anti-time ordering も、lesser/greater 成分を用いて書き直せる。時刻を x^0, y^0 と書けば

$$G^T(x, y) = \theta(x^0 - y^0) G^>(x, y) + \theta(y^0 - x^0) G^<(x, y), \quad (\text{A11})$$

$$G^{\bar{T}}(x, y) = \theta(y^0 - x^0) G^>(x, y) + \theta(x^0 - y^0) G^<(x, y). \quad (\text{A12})$$

この意味で、CTP の 2×2 行列は、通常の propagator だけでなく、粒子数や blocking を含む非平衡相関関数を同時に含んでいる。

さらに retarded/advanced Green 関数も同じ成分から構成できる。

$$G^R(x, y) = G^T(x, y) - G^<(x, y) = G^>(x, y) - G^{\bar{T}}(x, y) \quad (\text{A13})$$

$$= \theta(x^0 - y^0) [G^>(x, y) - G^<(x, y)], \quad (\text{A14})$$

$$G^A(x, y) = G^T(x, y) - G^>(x, y) = G^<(x, y) - G^{\bar{T}}(x, y) \quad (\text{A15})$$

$$= -\theta(y^0 - x^0) [G^>(x, y) - G^<(x, y)]. \quad (\text{A16})$$

したがって、CTP 形式では

$$\{G^{++}, G^{+-}, G^{-+}, G^{--}\} \iff \{G^T, G^<, G^>, G^{\bar{T}}\} \quad (\text{A17})$$

を基本成分として持ち、必要に応じて

$$G^R, \quad G^A, \quad G^> - G^<, \quad G^> + G^< \quad (\text{A18})$$

のような組み合わせへ変換して用いることができる。ニュートリノ量子運動論では、このうち特に $G^<$ が位相空間上の密度行列に対応するため、Kadanoff–Baym 方程式の lesser 成分を取り出すことで輸送方程式が得られる。

Appendix B: CTP における衝突項

Kadanoff–Baym 方程式において、衝突項は自己エネルギーを含む畳み込み ($\Sigma \circ G$) で与えられていた。この lesser 成分、つまり (+, -) 成分を取ることを考えると、これらは Keldysh 形式では行列だったので

$$(\Sigma \circ G)^{+-} = \sum_{a,b} \Sigma^{+a}(x, z) \eta^{ab} G^{b-}(z, y) \quad (\text{B1})$$

$$= \Sigma^{++} G^{+-} - \Sigma^{+-} G^{--} \quad (\text{B2})$$

$$= \Sigma^T G^< - \Sigma^< G^{\bar{T}} \quad (\text{B3})$$

となり、確かにここから lesser Green 関数が含まれるのがわかる。ただし、ここで第2項でマイナスを取っているのは、CTP 上の branch として正しく行って帰ってを与えないといけないことで、こちらは逆向きになることに由来していることに注意する必要がある。それを表す metric として

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{B4})$$

を導入してあった。

Time ordering や anti-time ordering を advanced や retarded に戻す操作を行うと、

$$\Sigma^T G^< - \Sigma^< G^{\bar{T}} = (\Sigma^R + \Sigma^<) G^< - \Sigma^< (G^< - G^A) \quad (\text{B5})$$

$$= \Sigma^R G^< + \Sigma^< G^A \quad (\text{B6})$$

と変換できる。これは Green 関数に対する左作用の場合の項であり、実際には右作用の場合も存在する。そのときには自己エネルギーと Green 関数の位置関係が逆転する。左作用から右作用の方程式の差分を取ることで、

$$\Sigma^R G^< + \Sigma^< G^A - G^R \Sigma^< - G^< \Sigma^A \quad (\text{B7})$$

という項が得られる。

ここまで分離した自己エネルギーや Green 関数は可換であるので、retarded および advanced な成分は

$$G^R - G^A = G^> - G^< \quad (\text{B8})$$

$$\Sigma^R - \Sigma^A = \Sigma^> - \Sigma^< \quad (\text{B9})$$

を用いて整理することができるので、結果として衝突項が

$$\Sigma^R G^< + \Sigma^< G^A - G^R \Sigma^< - G^< \Sigma^A = (\Sigma^> - \Sigma^<) G^< - \Sigma^< (G^> - G^<) \quad (\text{B10})$$

$$= \Sigma^> G^< - \Sigma^< G^> \quad (\text{B11})$$

と得られるようになる。符号が逆転しているように見えるが、これはこの項全体を kinetic term から離して右辺に持っていくことでよく見る衝突項の形 (gain-loss) になる。

ただし注意する点として、先ほどは自己エネルギーと Green 関数が可換であるとして操作を行なったが、ニュートリノ振動を含める場合にはフレーバー空間においては非可換になる。このときは左作用としての loss と右作用としての loss を保たねばならないので、反交換関係として与えられるようになる。なのでこの場合には、最終的に衝突項が

$$C_{\text{coll}} \sim \frac{1}{2} [\{\Sigma^>, G^<\} - \{\Sigma^<, G^>\}] \quad (\text{B12})$$

として与えられる。