

Memo: WENO scheme

Masamichi Zaizen
(Dated: November 13, 2024)

I. WENO SCHEME のお気持ち

このノートは、以前 Dirichlet 境界条件をもつ場合の Quantum Kinetic Equation を扱う計算コードを開発した際に、自分の手書きノートでまとめていた WENO scheme について改めて清書したものである。

偏微分方程式を数値的に解く際には、空間微分 (advection) をどのように評価するかによってその計算コードのある種々の特性が決まる。このメモでは、単調性をもつ高精度スキームである、Weighted Essentially Non-Oscillatory (WENO) scheme [1, 2] についてまとめる。ここでの説明は空間座標として一様にグリッドを貼った場合に限定する。非一様な空間グリッドの場合については別論文を参照せよ [3]。

この WENO scheme は、大元の ENO scheme で勿体なかった点である、計算量の割に精度が出ないところを改善したものとなっている。ENO scheme では、数値流速を評価する際のステンシルとして複数用意し、その中でも最も「滑らか」なものを採用することで不連続性に対処しようとしている。しかしその場合には折角計算した、採用されなかったステンシルの分だけ計算量を損っており、そのせいで見た目より精度が出ない。“Weighted” ENO scheme では、うまくこの「滑らかさ」に応じた係数を用いて線形結合を行うことで、不連続性に対処しつつ高精度化に成功している。WENO scheme を導入するための細かな計算は基本 Appendix にまとめ、以下のセクションでは大枠を示すようにまとめている。

II. 5TH-ORDER WENO SCHEME

いま解きたい 1 次元空間における偏微分方程式が

$$(\partial_t + v\partial_z)\psi(t, z, v) = \mathcal{H}(t, z, v)\psi(t, z, v) + \mathcal{C}[\psi] \quad (1)$$

で与えられるとき、数値流速 (numerical flux, f) を用いて $(t, z) = (t_n, z_j)$ での偏微分方程式は

$$\frac{\psi_j^{n+1} - \psi_j^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\Delta z} \left[f_{j+1/2}^{\text{WENO}}(t_n) - f_{j-1/2}^{\text{WENO}}(t_n) \right] + \mathcal{H}_j^n \psi_j^n + C_j^n \quad (2)$$

$$\equiv \mathcal{L}_j^n[\psi], \quad (3)$$

として離散化される。ここで速度 v を $\psi_{j+1/2}^{\text{WENO}}$ に掛けたものを数値流速と呼んでいる：

$$f_{j\pm 1/2}(t_n) = v\psi_{j\pm 1/2}(t_n). \quad (4)$$

この空間微分 (数値流速) を評価するために、今回は WENO scheme を採用する。特に今回は、Finite Volume (FV) method に基づいた考え方に従うことにする¹。FV method においては、格子点での値は格子内 (セル内) の平均値

$$\psi_j = \frac{1}{\Delta z} \int_{z_j - \Delta z/2}^{z_j + \Delta z/2} \psi(z) dz \quad (5)$$

$$= \int_{-1/2}^{+1/2} \psi(s) ds, \quad (6)$$

where $s \equiv (z - z_j)/\Delta z$ として与えられる (ここが FD method とは異なる思想になっている)。このときセル内の分布である $\psi(s)$ さえ評価することができれば、数値流速 $f_{j\pm 1/2}$ に辿り着くことができる。ここでは格子点は空間座標に一様に貼られていると仮定し、非一様グリッドの場合については議論しない (c.f., Ref. [3])。

セル境界での数値流速を得るために、ここでは 5 点ステンシル S (5 次精度) を採用し、そのステンシル上でラグランジュ補間を行う：

$$S = \{j-2, j-1, j, j+1, j+2\}. \quad (7)$$

¹ Finite Difference (FD) method でも当然 WENO は採用できる。Ref. [4] で FD method と FV method の比較をしてくれているのでそちらも参照。

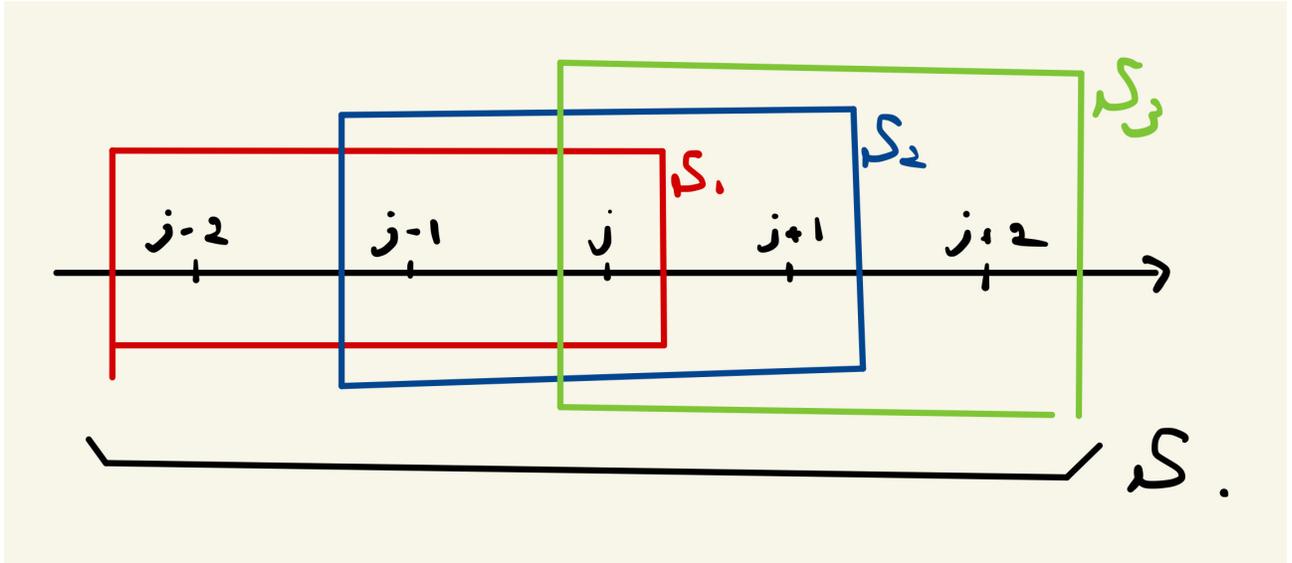


FIG. 1. ステンシルとサブステンシルの関係。

また、ENO scheme の思想に基づいて、セル境界 $z = z_{j\pm 1/2}$ での数値流速 $f_{j\pm 1/2}^{(3)}$ を推定するためのサブステンシル S_i を図1のように、

$$S_1 = \{j-2, j-1, j\} \quad (8)$$

$$S_2 = \{j-1, j, j+1\} \quad (9)$$

$$S_3 = \{j, j+1, j+2\} \quad (10)$$

として採用する ($5 = 2 \cdot 3 - 1$)²。このようにメインのステンシルとサブステンシルの両方を用意するお気持ちについては後述。

まずは $v \geq 0$ の場合を考えて、 $z-1$ が z の上流側であることにする。セル内の分布である $\psi(s)$ は、5点ステンシル上でのラグランジュ補間より

$$\begin{aligned} \psi^{(5)}(s) = & \frac{1}{1920}(80s^4 + 160s^3 - 120s^2 - 200s + 9)\psi_{j+2} \\ & - \frac{1}{480}(80s^4 + 80s^3 - 360s^2 - 340s + 29)\psi_{j+1} \\ & + \frac{1}{960}(240s^4 - 1320s^2 + 1067)\psi_j \\ & - \frac{1}{480}(80s^4 - 80s^3 - 360s^2 + 340s + 29)\psi_{j-1} \\ & + \frac{1}{1920}(80s^4 - 160s^3 - 120s^2 + 200s + 9)\psi_{j-2} \end{aligned} \quad (11)$$

として計算することができる³。このときセル境界 $s = +1/2$ での数値流速の値は、

$$f_{j+1/2}^{(5)} = v \left[-\frac{1}{20}\psi_{j+2} + \frac{9}{20}\psi_{j+1} + \frac{47}{60}\psi_j - \frac{13}{60}\psi_{j-1} + \frac{1}{30}\psi_{j-2} \right] \quad (12)$$

として5点ステンシル上での格子点の値 ψ_j を用いて構成することができる。

² 7次精度を考えたい場合は、7点ステンシルと、4つの4点サブステンシルを用意すればよい。ニュートリノ集団振動の計算コード COSE_ν の実装論文ではあるが、Appendix に7次精度の場合に必要な係数などを載せてくれている [5]。ただし、サブステンシルのオリジナルの weight (論文では $\{d_r\}_{r=0}^3$ と表記) の順番が逆になっている typo があるので注意。 $d_0 = 1/35$ とあるが、正しくは逆順なので実際には $d_3 = 1/35$ になる。weight などについての説明はそのまま先を読み進めていけば登場する。

³ このラグランジュ補間の具体的な計算は Appendix. A を参照。

一方で、このセル境界での数値流速は、サブステンシル S_i 上で補間した $\psi_{j+1/2}^{(i)}$ でも表すことができるはずである。とりわけ、サブステンシル上での数値流速の線形結合

$$f_{j+1/2} = v \sum_{i=1}^3 w_i \psi_{j+1/2}^{(i)} \quad (13)$$

でも許されるはずであり、これが先ほど計算したステンシル上での数値流速 $f_{j+1/2}^{(5)}$ と一致するようにその係数 w_i を決めることもできるだろう。このようにステンシルをそのまま使用するよりも、サブステンシルの線形結合として利用することで精度を維持しつつ、ENO scheme の本質である、不連続性への対処を組み込むことができるようになる。ENO scheme ではこの weight を掛けず、そのまま複数のステンシルの中から最も良さそうなもの（滑らかなもの）のみを採用する形になっている。しかしこれでは折角5点分のデータ点を用いたのに、実際には3点のサブステンシルなので精度的に損をしている。そこでこれをうまいこと重みを掛けてあげることで、用いたデータ点を最大限活用する修正法になる。そのため“Weighted” ENO (WENO) と呼ばれる。もちろんそのまま何も考えずそれぞれの補間関数の比較から係数を計算すると、ただのステンシル上での数値流速と全く同じものになる。なのでこの重みには、滑らかさの指標を組み込んだものを採用する。これについても後述で導入する。

いま、サブステンシル上での補間は

$$\begin{aligned} \psi^{(3-1)}(s) &= \frac{1}{24}(12s^2 + 36s + 23)\psi_j \\ &\quad - \frac{1}{12}(12s^2 + 24s - 1)\psi_{j-1} \\ &\quad + \frac{1}{24}(12s^2 + 12s - 1)\psi_{j-2} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \psi^{(3-2)}(s) &= \frac{1}{24}(12s^2 + 12s - 1)\psi_{j+1} \\ &\quad - \frac{1}{12}(12s^2 - 13)\psi_j \\ &\quad + \frac{1}{24}(12s^2 - 12s - 1)\psi_{j-1} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \psi^{(3-3)}(s) &= \frac{1}{24}(12s^2 - 12s - 1)\psi_{j+2} \\ &\quad - \frac{1}{12}(12s^2 - 24s - 1)\psi_{j+1} \\ &\quad + \frac{1}{24}(12s^2 - 36s + 23)\psi_j \end{aligned} \quad (16)$$

として与えられる⁴。ステンシルのときと同様に、セル境界 ($s = +1/2$) での値は、

$$\psi_{j+1/2}^{(3-1)} = \frac{11}{6}\psi_j - \frac{7}{6}\psi_{j-1} + \frac{2}{6}\psi_{j-2} \quad (17)$$

$$\psi_{j+1/2}^{(3-2)} = \frac{2}{6}\psi_{j+1} + \frac{5}{6}\psi_j - \frac{1}{6}\psi_{j-1} \quad (18)$$

$$\psi_{j+1/2}^{(3-3)} = -\frac{1}{6}\psi_{j+2} + \frac{5}{6}\psi_{j+1} + \frac{2}{6}\psi_j \quad (19)$$

となる。この3つの線形結合が式(12)と一致するような結合係数は、

$$w_1 = \frac{1}{10}, w_2 = \frac{6}{10}, w_3 = \frac{3}{10} \quad (20)$$

となることがすぐにわかる⁵。

先ほども述べたように、ENO scheme では最も滑らかなものを採用していたのに、ここで得られた weight をそのまま採用してしまえば不連続性（滑らかでない関数）への対処が弱くなってしまふ。そこで滑らかさの指標 (Smoothness

⁴ ここでのサブステンシル上でのラグランジュ補間の計算は Appendix B を参照。

⁵ ここではセル境界での値を用いて線形結合係数を決めだが、一般の s に対して連立することで、 s の関数として重み $w_i(s)$ を与えることも可能である。

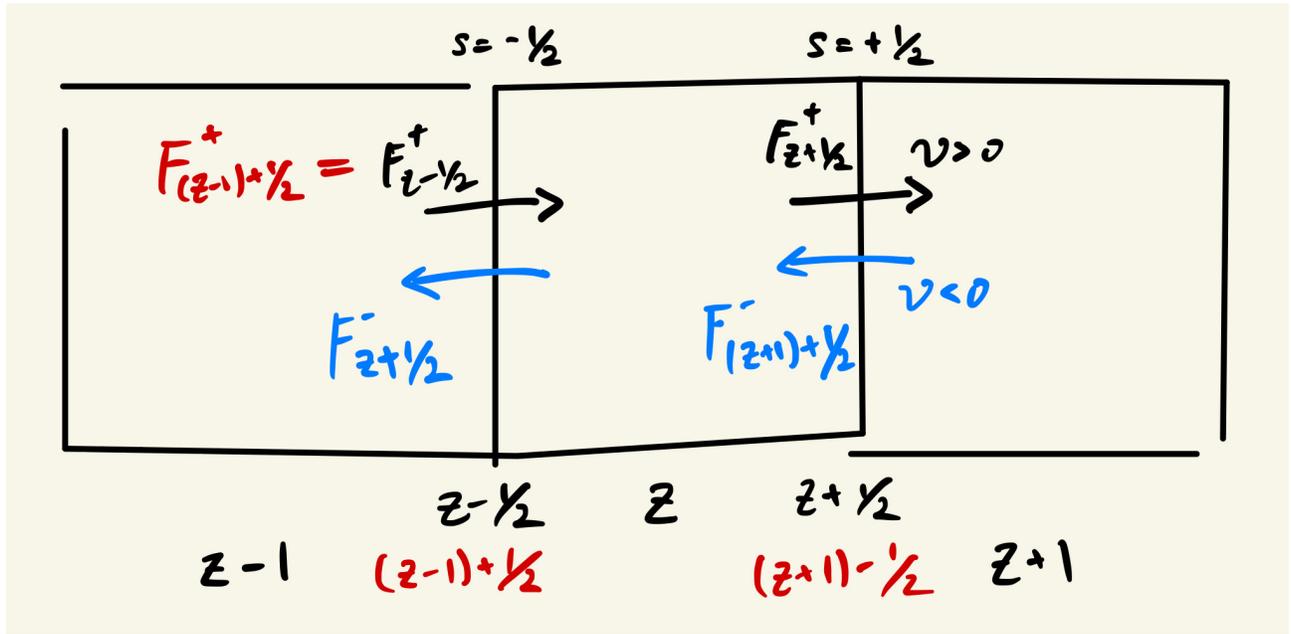


FIG. 2. セル境界での数値流速。 $s = -1/2$ は隣のセルにおける $s = +1/2$ として見る事ができるのがわかる。

Indicator: SI) として

$$\beta_i \equiv \sum_{l=1}^k \int_{-1/2}^{+1/2} \left(\frac{d^l \psi^{(i)}(s)}{ds^l} \right)^2 ds \quad (21)$$

を定義する。ここでは $k = 2$ を採用する。これを計算すると⁶

$$\beta_1 = \frac{13}{12} (\psi_j - 2\psi_{j-1} + \psi_{j-2})^2 + \frac{1}{4} (3\psi_j - 4\psi_{j-1} + \psi_{j-2})^2 \quad (22)$$

$$\beta_2 = \frac{13}{12} (\psi_{j+1} - 2\psi_j + \psi_{j-1})^2 + \frac{1}{4} (\psi_{j+1} - \psi_{j-1})^2 \quad (23)$$

$$\beta_3 = \frac{13}{12} (\psi_{j+2} - 2\psi_{j+1} + \psi_j)^2 + \frac{1}{4} (\psi_{j+2} - 4\psi_{j+1} + 3\psi_j)^2 \quad (24)$$

となる。

これらの smoothness indicators を用いて改めて、weight を次のように再定義する：

$$w_i = \frac{\tilde{w}_i}{\sum_k \tilde{w}_k}, \quad (25)$$

where

$$\tilde{w}_i = \frac{\gamma_i}{(\varepsilon + \beta_i)^2}. \quad (26)$$

ここで γ_i が元々の式 (20) の weight に対応するものである。 ε はゼロ割を防ぐためのもので、通常 10^{-6} 程度の値を採用する。このとき、 $\beta_i \simeq 1$ であればこの新しい weight \tilde{w}_i はほぼ γ_i と一致し、通常の結果から得られる関数形に帰結する。一方で、あまり滑らかでない場合は β_i によって weight がうまく補正される。具体的には、汚いサブステンシル S_i からの寄与が $\beta_i > 1$ によって潰されることになる。

ここまでの計算は格子点の右側セル境界 $s = +1/2$ についてであったため、今度は左側のセル境界 $s = -1/2$ でのサブステンシルから補間される値を考えてやる。だが図 2 からわかるように、格子点 z における $s = -1/2$ のセル境界は、

⁶ SI_i の具体的な計算は Appendix. C を参照。

1つ左隣の格子点 $z-1$ に対するセル境界 $s = +1/2$ と等しいはずである。したがって、わざわざ $s = -1/2$ の場合を計算せずとも隣のセルを中心に計算して得られた値を持ってきてだけで数値流速の差分を取ることができる。ただし、いま考えているセルが計算領域一番左端の $z = 1$ である場合には、ちゃんと境界条件に合う形で ghost cell $z = 0$ の値を用意する必要があることに注意。結果的に、数値流速の差分は

$$\delta F^+(z) = f_{j+1/2}^+(z) - f_{j-1/2}^+(z) \quad (27)$$

$$= f_{j+1/2}^+(z) - f_{j+1/2}^+(z-1) \quad (28)$$

として評価することができる。

続いて $v < 0$ の場合に対してだが、これはステンシル S を反転させてやれば良いだけである。つまりサブステンシル上での補間が

$$\psi_{j-1/2}^{(3-1)} = \frac{2}{6}\psi_{j+2} - \frac{7}{6}\psi_{j+1} + \frac{11}{6}\psi_j \quad (29)$$

$$\psi_{j-1/2}^{(3-2)} = -\frac{1}{6}\psi_{j+1} + \frac{5}{6}\psi_j + \frac{2}{6}\psi_{j-1} \quad (30)$$

$$\psi_{j-1/2}^{(3-3)} = \frac{2}{6}\psi_j + \frac{5}{6}\psi_{j-1} - \frac{1}{6}\psi_{j-2} \quad (31)$$

として向きを反転させるだけで与えられる。Smoothness indicators β_i についても同様にステンシルを反転させて考える必要があるが、式を見ればわかるようにこちらはステンシルの反転に対して対称である。なので改めて計算してあげる必要はなく、 $\psi_{j-1/2}^{(3-1)}$ に対して β_3 を用いた重みをかませてやれば良い。一方で、ステンシルを反転させても係数の位置は変わらないので、元の重み w_i (or γ_i) はそのままであることには注意する必要がある。以上を踏まえた上で、 $v < 0$ に対する数値流速の差分は

$$\delta F^-(z) = f_{j-1/2}^-(z) - f_{j+1/2}^-(z) \quad (32)$$

$$= f_{j+1/2}^-(z+1) - f_{j+1/2}^-(z) \quad (33)$$

として与えられる。この場合においても同様に、いま考えているセルが一番右端の $z = N_z$ である場合には、ちゃんと境界条件に合う形で ghost cell $z = N_z + 1$ の値を用意する必要があることに注意する必要がある。

以上の結果を用いることで、目的の式 (2) を数値的に解くことができるようになる。

Appendix A: ステンシル上での多項式補間

FV method に基づいて、ここでは格子境界上での流速を近似する。式 (6) において、 $\psi(s)$ の原始関数を $\Psi(s)$ としたとき、格子点上の値は

$$\psi_j = \int_{-1/2}^{+1/2} \psi(s) ds = \Psi_{j+1/2} - \Psi_{j-1/2} \quad (A1)$$

として与えられる。これから逆に $\Psi_{j+1/2} = \psi_j + \Psi_{j-1/2}$ として書き直すことができ、これをずらして連立してあげることで

$$\Psi_{j+1/2} = \left(\sum_{l=0}^{k-1} \psi_{j-l} \right) + \Psi_{j+1/2-k} \quad (A2)$$

という関係式を得ることができる。これは例えば $j = j+2, k = 5$ に対して

$$\Psi_{j+5/2} = \psi_{j+2} + \psi_{j+1} + \psi_j + \psi_{j-1} + \psi_{j-2} + \Psi_{j-5/2} \quad (A3)$$

と表せることになる。更に、式 (A1) から $\psi_{j+2} = \Psi_{j+5/2} - \Psi_{j+3/2}$ であるので、

$$\begin{aligned} \Psi_{j+3/2} &= \psi_{j+1} + \psi_j + \psi_{j-1} + \psi_{j-2} + \Psi_{j-5/2} \\ \Psi_{j+1/2} &= \psi_j + \psi_{j-1} + \psi_{j-2} + \Psi_{j-5/2} \\ \Psi_{j-1/2} &= \psi_{j-1} + \psi_{j-2} + \Psi_{j-5/2} \\ \Psi_{j-3/2} &= \psi_{j-2} + \Psi_{j-5/2} \\ \Psi_{j-5/2} &= \Psi_{j-5/2} \end{aligned} \quad (A4)$$

となる。ここで、この原始関数 $\Psi(s)$ の多項式近似は、5点ステンシル上にはセル境界が全部で6枚存在することに注意すれば、 $\{\Psi_{j+5/2}, \Psi_{j+3/2}, \dots, \Psi_{j-5/2}\}$ を係数としたラグランジュ補間から計算できることがわかる。すなわち、

$$\begin{aligned} \Psi^{(5)}(s) &= \sum_{a=0}^b \left(\prod_{\substack{0 \leq c \leq b \\ c \neq a}} \frac{z - z_c}{z_a - z_c} \right) \Psi_a(z) \\ &= \frac{(z - z_{j+3/2})(z - z_{j+1/2})(z - z_{j-1/2})(z - z_{j-3/2})(z - z_{j-5/2})}{(z_{j+5/2} - z_{j+3/2})(z_{j+5/2} - z_{j+1/2})(z_{j+5/2} - z_{j-1/2})(z_{j+5/2} - z_{j-3/2})(z_{j+5/2} - z_{j-5/2})} \Psi_{j+5/2} \\ &+ \frac{(z - z_{j+5/2})(z - z_{j+1/2})(z - z_{j-1/2})(z - z_{j-3/2})(z - z_{j-5/2})}{(z_{j+3/2} - z_{j+5/2})(z_{j+3/2} - z_{j+1/2})(z_{j+3/2} - z_{j-1/2})(z_{j+3/2} - z_{j-3/2})(z_{j+3/2} - z_{j-5/2})} \Psi_{j+3/2} \\ &+ \dots \\ &+ \frac{(z - z_{j+5/2})(z - z_{j+3/2})(z - z_{j+1/2})(z - z_{j-1/2})(z - z_{j-3/2})}{(z_{j-5/2} - z_{j+5/2})(z_{j-5/2} - z_{j+3/2})(z_{j-5/2} - z_{j+1/2})(z_{j-5/2} - z_{j-1/2})(z_{j-5/2} - z_{j-3/2})} \Psi_{j-5/2} \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

として「元の」空間グリッド z の関数として各地点での値を係数にした多項式展開が書き下せる。 s に対する定義 ($s = (z - z_j)/\Delta z$) より、

$$\begin{aligned} \Psi^{(5)}(s) &= \frac{(s - 3/2)(s - 1/2)(s + 1/2)(s + 3/2)(s + 5/2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \Psi_{j+5/2} \\ &+ \frac{(s - 5/2)(s - 1/2)(s + 1/2)(s + 3/2)(s + 5/2)}{(-1) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \Psi_{j+3/2} \\ &+ \dots \\ &+ \frac{(s - 5/2)(s - 3/2)(s - 1/2)(s + 1/2)(s + 3/2)}{(-5) \cdot (-4) \cdot (-3) \cdot (-2) \cdot (-1)} \Psi_{j-5/2} \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

となる。さらに展開して書き出せば

$$\Psi^{(5)}(s) = \frac{32s^5 + 80s^4 - 80s^3 - 200s^2 + 18s + 45}{2^5 \cdot 120} \Psi_{j+5/2} \quad (\text{A8})$$

$$+ \frac{32s^5 + 48s^4 - 208s^3 - 312s^2 + 50s + 75}{2^5 \cdot (-24)} \Psi_{j+3/2} \quad (\text{A9})$$

$$+ \frac{32s^5 + 16s^4 - 272s^3 - 136s^2 + 450s + 225}{2^5 \cdot 12} \Psi_{j+1/2} \quad (\text{A10})$$

$$+ \frac{32s^5 - 16s^4 - 272s^3 + 136s^2 + 450s - 225}{2^5 \cdot (-12)} \Psi_{j-1/2} \quad (\text{A11})$$

$$+ \frac{32s^5 - 48s^4 - 208s^3 + 312s^2 + 50s - 75}{2^5 \cdot 24} \Psi_{j-3/2} \quad (\text{A12})$$

$$+ \frac{32s^5 - 80s^4 - 80s^3 + 200s^2 + 18s - 45}{2^5 \cdot (-120)} \Psi_{j-5/2} \quad (\text{A13})$$

となる。これを $\Psi_{j+n/2}$ の中身に対して気合いで整理していく。 $\Psi(s)$ は $\psi(s)$ の原始関数であり、最終的に知りたい $\psi(s)$ を求めるにはこれを s について微分すればよい。定数項 (s の0次成分) は無視して適当に最後にまとめてやっても問題ない。このとき、 ψ_{j+2} の成分は

$$\frac{32s^5 + 80s^4 - 80s^3 - 200s^2 + 18s + 45}{2^5 \cdot 120} = \frac{16s^5 + 40s^4 - 40s^3 - 100s^2 + 9s}{1920} + \text{const.} \quad (\text{A14})$$

となる。続いて、 ψ_{j+1} の成分は

$$\begin{aligned}
& \frac{32s^5 + 80s^4 - 80s^3 - 200s^2 + 18s}{2^5 \cdot 120} + \frac{32s^5 + 48s^4 - 208s^3 - 312s^2 + 50s + 75}{2^5 \cdot (-24)} + \text{const.} \\
&= \frac{(32s^5 + 80s^4 - 80s^3 - 200s^2 + 18s) - (160s^5 + 240s^4 - 1040s^3 - 1560s^2 + 250s)}{2^5 \cdot 120} + \text{const.} \\
&= \frac{-128s^5 - 160s^4 + 960s^3 + 1360s^2 - 232s}{2^5 \cdot 120} + \text{const.} \\
&= -\frac{16s^5 + 20s^4 - 120s^3 - 170s^2 + 29s}{480} + \text{const.} \tag{A15}
\end{aligned}$$

ψ_j の成分は

$$\begin{aligned}
& \frac{-128s^5 - 160s^4 + 960s^3 + 1360s^2 - 232s}{2^5 \cdot 120} + \frac{32s^5 + 16s^4 - 272s^3 - 136s^2 + 450s + 225}{2^5 \cdot 12} + \text{const.} \\
&= \frac{(-128s^5 - 160s^4 + 960s^3 + 1360s^2 - 232s) + (320s^5 + 160s^4 - 2720s^3 - 1360s^2 + 4500s)}{2^5 \cdot 120} + \text{const.} \\
&= \frac{192s^5 - 1760s^3 + 4268s}{2^5 \cdot 120} + \text{const.} \\
&= \frac{48s^5 - 440s^3 + 1067s}{960} + \text{const.} \tag{A16}
\end{aligned}$$

ψ_{j-1} の成分は

$$\begin{aligned}
& \frac{192s^5 - 1760s^3 + 4268s}{2^5 \cdot 120} + \frac{32s^5 - 16s^4 - 272s^3 + 136s^2 + 450s - 225}{2^5 \cdot (-12)} + \text{const.} \\
&= \frac{(192s^5 - 1760s^3 + 4268s) - (320s^5 - 160s^4 - 2720s^3 + 1360s^2 + 4500s)}{2^5 \cdot 120} + \text{const.} \\
&= \frac{-128s^5 + 160s^4 + 960s^3 - 1360s^2 - 232s}{2^5 \cdot 120} + \text{const.} \\
&= -\frac{16s^5 - 20s^4 - 120s^3 + 170s^2 + 29s}{480} + \text{const.} \tag{A17}
\end{aligned}$$

ψ_{j-2} の成分は

$$\begin{aligned}
& \frac{-128s^5 + 160s^4 + 960s^3 - 1360s^2 - 232s}{2^5 \cdot 120} + \frac{32s^5 - 48s^4 - 208s^3 + 312s^2 + 50s - 75}{2^5 \cdot 24} + \text{const.} \\
&= \frac{(-128s^5 + 160s^4 + 960s^3 - 1360s^2 - 232s) + (160s^5 - 240s^4 - 1040s^3 + 1560s^2 + 250s)}{2^5 \cdot 120} + \text{const.} \\
&= \frac{32s^5 - 80s^4 - 80s^3 + 200s^2 + 18s}{2^5 \cdot 120} + \text{const.} \\
&= \frac{16s^5 - 40s^4 - 40s^3 + 100s^2 + 9s}{1920} + \text{const.} \tag{A18}
\end{aligned}$$

最後に、 $\Psi_{j-5/2}$ の成分は、

$$\begin{aligned}
& \frac{32s^5 - 80s^4 - 80s^3 + 200s^2 + 18s}{2^5 \cdot 120} + \frac{32s^5 - 80s^4 - 80s^3 + 200s^2 + 18s - 45}{2^5 \cdot (-120)} + \text{const.} \\
&= \text{const.} \tag{A19}
\end{aligned}$$

としてうまく消えてくれる。以上をまとめると、

$$\begin{aligned}
\Psi^{(5)}(s) &= \frac{1}{1920}(16s^5 + 40s^4 - 40s^3 - 100s^2 + 9s)\psi_{j+2} \\
&\quad - \frac{1}{480}(16s^5 + 20s^4 - 120s^3 - 170s^2 + 29s)\psi_{j+1} \\
&\quad + \frac{1}{960}(48s^5 - 440s^3 + 1067s)\psi_j \\
&\quad - \frac{1}{480}(16s^5 - 20s^4 - 120s^3 + 170s^2 + 29s)\psi_{j-1} \\
&\quad + \frac{1}{1920}(16s^5 - 40s^4 - 40s^3 + 100s^2 + 9s)\psi_{j-2} + \text{const.}
\end{aligned} \tag{A20}$$

となる。これを s について微分すれば

$$\begin{aligned}
\psi^{(5)}(s) &= \frac{1}{1920}(80s^4 + 160s^3 - 120s^2 - 200s + 9)\psi_{j+2} \\
&\quad - \frac{1}{480}(80s^4 + 80s^3 - 360s^2 - 340s + 29)\psi_{j+1} \\
&\quad + \frac{1}{960}(240s^4 - 1320s^2 + 1067)\psi_j \\
&\quad - \frac{1}{480}(80s^4 - 80s^3 - 360s^2 + 340s + 29)\psi_{j-1} \\
&\quad + \frac{1}{1920}(80s^4 - 160s^3 - 120s^2 + 200s + 9)\psi_{j-2}
\end{aligned} \tag{A21}$$

として、セル内の分布関数である式 (11) を、ステンシル上のセル中心での値を用いて評価することができた。

Appendix B: サブステンシル上での多項式補間

今度は3点サブステンシル S_1, S_2, S_3 それぞれに対して同様の計算を行う。サブステンシル S_1 は $\{j-2, j-1, j\}$ の3点を持つので、このときのセル境界は $\{j-5/2, j-3/2, j-1/2, j+1/2\}$ である。このとき原始関数 $\Psi(s)$ は、式 (A1) と式 (A2) の $j = j, k = 3$ に対して、

$$\begin{aligned}
\Psi_{j+1/2} &= \psi_j + \psi_{j-1} + \psi_{j-2} + \Psi_{j-5/2} \\
\Psi_{j-1/2} &= \psi_{j-1} + \psi_{j-2} + \Psi_{j-5/2} \\
\Psi_{j-3/2} &= \psi_{j-2} + \Psi_{j-5/2} \\
\Psi_{j-5/2} &= \Psi_{j-5/2}
\end{aligned} \tag{B1}$$

という関係式が用意できる。同じようにラグランジュ補間を用いて展開してあげれば、

$$\begin{aligned}
\Psi^{(3-1)}(s) &= \frac{(s+1/2)(s+3/2)(s+5/2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Psi_{j+1/2} \\
&\quad + \frac{(s-1/2)(s+3/2)(s+5/2)}{(-1) \cdot 1 \cdot 2} \Psi_{j-1/2} \\
&\quad + \frac{(s-1/2)(s+1/2)(s+5/2)}{(-2) \cdot (-1) \cdot 1} \Psi_{j-3/2} \\
&\quad + \frac{(s-1/2)(s+1/2)(s+3/2)}{(-3) \cdot (-2) \cdot (-1)} \Psi_{j-5/2}
\end{aligned} \tag{B2}$$

となる。これも頑張ってセル中心の値 ψ_j について書き出していく。もちろん最後に s について微分するので0次項は無視してよく、また余分な $\Psi_{j-5/2}$ もちゃんと消えてくれる。

$$\begin{aligned}
\Psi^{(3-1)}(s) &= \frac{1}{48}(8s^3 + 36s^2 + 46s)\psi_{\{j,j-1,j-2\}} \\
&\quad - \frac{1}{48}(24s^3 + 84s^2 + 42s)\psi_{\{j-1,j-2\}} \\
&\quad + \frac{1}{48}(24s^3 + 60s^2 - 6s)\psi_{\{j-2\}} + \text{const.}
\end{aligned} \tag{B3}$$

結果的に、

$$\begin{aligned}\Psi^{(3-1)}(s) &= \frac{1}{24}(4s^3 + 18s^2 + 23s)\psi_j \\ &\quad - \frac{1}{12}(4s^3 + 12s^2 - 1s)\psi_{j-1} \\ &\quad + \frac{1}{24}(4s^3 + 6s^2 - 1s)\psi_{j-2} + \text{const.}\end{aligned}\tag{B4}$$

を得る。これを微分することで、サブステンシル S_1 における関数は

$$\begin{aligned}\psi^{(3-1)}(s) &= \frac{1}{24}(12s^2 + 36s + 23)\psi_j \\ &\quad - \frac{1}{12}(12s^2 + 24s - 1)\psi_{j-1} \\ &\quad + \frac{1}{24}(12s^2 + 12s - 1)\psi_{j-2}\end{aligned}\tag{B5}$$

となり、式 (14) が得られた。

また頑張って同様に、サブステンシル S_2 上でのラグランジュ補間を行っていく。 S_2 は $\{j-1, j, j+1\}$ の格子点を持つので、このセル境界は $\{j-3/2, j-1/2, j+1/2, j+3/2\}$ である。これに合うように原始関数 $\Psi(s)$ の関係式を探してこればよく、式 (A1) と式 (A2) の $j = j+1, k = 3$ に対して、

$$\begin{aligned}\Psi_{j+3/2} &= \psi_{j+1} + \psi_j + \psi_{j-1} + \Psi_{j-3/2} \\ \Psi_{j+1/2} &= \psi_j + \psi_{j-1} + \Psi_{j-3/2} \\ \Psi_{j-1/2} &= \psi_{j-1} + \Psi_{j-3/2} \\ \Psi_{j-3/2} &= \Psi_{j-3/2}\end{aligned}\tag{B6}$$

が得られる。サブステンシル S_2 上でのラグランジュ補間は

$$\begin{aligned}\Psi^{(3-2)}(s) &= \frac{(s-1/2)(s+1/2)(s+3/2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Psi_{j+3/2} \\ &\quad + \frac{(s-3/2)(s+1/2)(s+3/2)}{(-1) \cdot 1 \cdot 2} \Psi_{j+1/2} \\ &\quad + \frac{(s-3/2)(s-1/2)(s+3/2)}{(-2) \cdot (-1) \cdot 1} \Psi_{j-1/2} \\ &\quad + \frac{(s-3/2)(s-1/2)(s+1/2)}{(-3) \cdot (-2) \cdot (-1)} \Psi_{j-3/2}\end{aligned}\tag{B7}$$

となる。同じように $\Psi_{j-3/2}$ が消えてくれることを考慮しつつ整理すると

$$\begin{aligned}\Psi^{(3-2)}(s) &= \frac{1}{48}(8s^3 + 12s^2 - 4s)\psi_{\{j+1, j, j-1\}} \\ &\quad - \frac{1}{48}(24s^3 + 12s^2 - 54s)\psi_{\{j, j-1\}} \\ &\quad + \frac{1}{48}(24s^3 - 12s^2 - 54s)\psi_{j-1} + \text{const.}\end{aligned}\tag{B8}$$

となる。更に整理することで

$$\begin{aligned}\Psi^{(3-2)}(s) &= \frac{1}{24}(4s^3 + 6s^2 - s)\psi_{j+1} \\ &\quad - \frac{1}{12}(4s^3 - 13s)\psi_j \\ &\quad + \frac{1}{24}(4s^3 - 6s^2 - s)\psi_{j-1} + \text{const.}\end{aligned}\tag{B9}$$

となり、 s について微分することで

$$\begin{aligned}\psi^{(3-2)}(s) &= \frac{1}{24}(12s^2 + 12s - 1)\psi_{j+1} \\ &\quad - \frac{1}{12}(12s^2 - 13)\psi_j \\ &\quad + \frac{1}{24}(12s^2 - 12s - 1)\psi_{j-1}\end{aligned}\tag{B10}$$

として式 (15) を得ることができた。

最後に、サブステンシル S_3 についても頑張る。 S_3 は $\{j, j+1, j+2\}$ の格子点を持つので、このセル境界は $\{j-1/2, j+1/2, j+3/2, j+5/2\}$ である。これに合うように原始関数 $\Psi(s)$ の関係式を探してこればよく、式 (A1) と式 (A2) の $j = j+2, k = 3$ に対して、

$$\begin{aligned}\Psi_{j+5/2} &= \psi_{j+2} + \psi_{j+1} + \psi_j + \Psi_{j-1/2} \\ \Psi_{j+3/2} &= \psi_{j+1} + \psi_j + \Psi_{j-1/2} \\ \Psi_{j+1/2} &= \psi_j + \Psi_{j-1/2} \\ \Psi_{j-1/2} &= \Psi_{j-1/2}\end{aligned}\tag{B11}$$

が得られる。サブステンシル S_3 上でのラグランジュ補間は

$$\begin{aligned}\Psi^{(3-3)}(s) &= \frac{(s-3/2)(s-1/2)(s+1/2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Psi_{j+5/2} \\ &\quad + \frac{(s-5/2)(s-1/2)(s+1/2)}{(-1) \cdot 1 \cdot 2} \Psi_{j+3/2} \\ &\quad + \frac{(s-5/2)(s-3/2)(s+1/2)}{(-2) \cdot (-1) \cdot 1} \Psi_{j+1/2} \\ &\quad + \frac{(s-5/2)(s-3/2)(s-1/2)}{(-3) \cdot (-2) \cdot (-1)} \Psi_{j-1/2}\end{aligned}\tag{B12}$$

となる。同じように $\Psi_{j-1/2}$ が消えてくれることを考慮しつつ整理すると

$$\begin{aligned}\Psi^{(3-3)}(s) &= \frac{1}{48}(8s^3 - 12s^2 - 2s)\psi_{\{j+2, j+1, j\}} \\ &\quad - \frac{1}{48}(24s^3 - 60s^2 - 6s)\psi_{\{j+1, j\}} \\ &\quad + \frac{1}{48}(24s^3 - 84s^2 + 42s)\psi_j + \text{const.}\end{aligned}\tag{B13}$$

となる。更に整理することで

$$\begin{aligned}\Psi^{(3-3)}(s) &= \frac{1}{24}(4s^3 - 6s^2 - s)\psi_{j+2} \\ &\quad - \frac{1}{12}(4s^3 - 12s^2 - s)\psi_{j+1} \\ &\quad + \frac{1}{24}(4s^3 - 18s^2 + 23s)\psi_j + \text{const.}\end{aligned}\tag{B14}$$

となり、 s について微分することで

$$\begin{aligned}\psi^{(3-3)}(s) &= \frac{1}{24}(12s^2 - 12s - 1)\psi_{j+2} \\ &\quad - \frac{1}{12}(12s^2 - 24s - 1)\psi_{j+1} \\ &\quad + \frac{1}{24}(12s^2 - 36s + 23)\psi_j\end{aligned}\tag{B15}$$

として式 (16) を得ることができた。

Appendix C: Smoothness Indicators の計算

滑らかさの指標として定義された

$$\beta_i \equiv \sum_{l=1}^{k=2} \int_{-1/2}^{+1/2} \left(\frac{d^l \psi^{(i)}(s)}{ds^l} \right)^2 ds \quad (\text{C1})$$

をそれぞれのサブステンシルから得られた $\psi^{3-i}(s)$ に対して計算する。まずサブステンシル S_1 について

$$\beta_1 = \int_{-1/2}^{+1/2} \left(\frac{d\psi^{(3-1)}(s)}{ds} \right)^2 ds + \int_{-1/2}^{+1/2} \left(\frac{d^2\psi^{(3-1)}(s)}{ds^2} \right)^2 ds \quad (\text{C2})$$

$$= \int_{-1/2}^{+1/2} ds \left[\left(\frac{1}{24}(24s+36)\psi_j - \frac{1}{12}(24s+24)\psi_{j-1} + \frac{1}{24}(24s+12)\psi_{j-2} \right)^2 + (\psi_j - 2\psi_{j-1} + \psi_{j-2})^2 \right] \quad (\text{C3})$$

$$= \int_{-1/2}^{+1/2} ds \left[\left((\psi_j - 2\psi_{j-1} + \psi_{j-2})s + \frac{1}{2}(3\psi_j - 4\psi_{j-1} + \psi_{j-2}) \right)^2 + (\psi_j - 2\psi_{j-1} + \psi_{j-2})^2 \right] \quad (\text{C4})$$

$$= \frac{13}{12}(\psi_j - 2\psi_{j-1} + \psi_{j-2})^2 + \frac{1}{4}(3\psi_j - 4\psi_{j-1} + \psi_{j-2})^2 \quad (\text{C5})$$

として、式 (22) が得られた。

同様に他のサブステンシルについても計算していく。サブステンシル S_2 について

$$\beta_2 = \int_{-1/2}^{+1/2} ds \left[\left(\frac{1}{24}(24s+12)\psi_{j+1} - \frac{1}{12}(24s)\psi_j + \frac{1}{24}(24s-12)\psi_{j-1} \right)^2 + (\psi_{j+1} - 2\psi_j + \psi_{j-1})^2 \right] \quad (\text{C6})$$

$$= \int_{-1/2}^{+1/2} ds \left[\left((\psi_{j+1} - 2\psi_j + \psi_{j-1})s + \frac{1}{2}(\psi_{j+1} - \psi_{j-1}) \right)^2 + (\psi_{j+1} - 2\psi_j + \psi_{j-1})^2 \right] \quad (\text{C7})$$

$$= \frac{13}{12}(\psi_{j+1} - 2\psi_j + \psi_{j-1})^2 + \frac{1}{4}(\psi_{j+1} - \psi_{j-1})^2 \quad (\text{C8})$$

また、サブステンシル S_3 について

$$\beta_3 = \int_{-1/2}^{+1/2} ds \left[\left(\frac{1}{24}(24s-12)\psi_{j+2} - \frac{1}{12}(24s-24)\psi_{j+1} + \frac{1}{24}(24s-36)\psi_j \right)^2 + (\psi_{j+2} - 2\psi_{j+1} + \psi_j)^2 \right] \quad (\text{C9})$$

$$= \int_{-1/2}^{+1/2} ds \left[\left((\psi_{j+2} - 2\psi_{j+1} + \psi_j)s + \frac{1}{2}(-\psi_{j+2} + 4\psi_{j+1} - 3\psi_j) \right)^2 + (\psi_{j+2} - 2\psi_{j+1} + \psi_j)^2 \right] \quad (\text{C10})$$

$$= \frac{13}{12}(\psi_{j+2} - 2\psi_{j+1} + \psi_j)^2 + \frac{1}{4}(\psi_{j+2} - 4\psi_{j+1} + 3\psi_j)^2 \quad (\text{C11})$$

となり、式 (23) と (24) を得ることができた。

[1] X.-D. Liu, S. Osher, and T. Chan, Weighted Essentially Non-oscillatory Schemes, *Journal of Computational Physics* **115**, 200 (1994).

- [2] G.-S. Jiang and C.-W. Shu, Efficient Implementation of Weighted ENO Schemes, [Journal of Computational Physics](#) **126**, 202 (1996).
- [3] W.-F. Huang, Y.-X. Ren, and X. Jiang, A simple algorithm to improve the performance of the WENO scheme on non-uniform grids, [Acta Mechanica Sinica](#) **34**, 37 (2018).
- [4] C.-W. Shu, High-order Finite Difference and Finite Volume WENO Schemes and Discontinuous Galerkin Methods for CFD, [International Journal of Computational Fluid Dynamics](#) **17**, 107 (2003).
- [5] M. George, C.-Y. Lin, M.-R. Wu, T. G. Liu, and Z. Xiong, COSE ν : A collective oscillation simulation engine for neutrinos, [Computer Physics Communications](#) **283**, 108588 (2023).